

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ЛАГЕРРА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ МАГНИТОУПРУГОСТИ

Ш. Х. Имомназаров, А. А. Михайлов

Аннотация. Проиллюстрирована применимость спектрального метода Лагерра к решению одномерной задачи магнитопорупругости с учетом электрокинетического коэффициента. Исследуется одномерная нестационарная задача импульсного воздействия на насыщенную пористую среду с учетом эффектов электромагнитоакустики. Численно показаны особенности акустического отклика на импульсное электромагнитное воздействие в такой системе. Получена зависимость амплитуд поперечных акустических волн, пришедших на границу пористой среды, от внешнего магнитного поля для от различных параметров пористой среды. Представлены результаты численного моделирования для тестовой пробной среды.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.46.60.007

Ключевые слова: пористая насыщенная среда, преобразование Лагерра, межфазное трение, магнитозвуковые колебания.

1. Введение

Модели динамики гетерофазных насыщенных жидкостью пористых сред находят широкое применение при решении прикладных геофизических и геологических задач. Особый интерес представляет проблема влияния присутствия внешнего поля, в частности магнитного поля, на нелинейную динамику таких сред. Одним из эффективных методов решения нелинейных гетерофазных моделей является такой численно-аналитический метод, как метод комплексирования интегрального преобразования Лагерра по времени и конечно-разностного метода по пространству. Этот метод является аналогом спектрально-разностного метода на основе Фурье-преобразования, в котором аналогом частоты является степень полиномов Лагерра. Преимуществом преобразования Лагерра является возможность привести исходную систему уравнений к системе с параметром разделения только в правой части. Такой подход позволяет сократить время счета при решении нестационарных задач динамики гетерофазных сред. Данный метод решения динамических задач успешно применяется в задачах теории упругости и вязкоупругости [1, 2]. В применении к двухскоростным средам данный метод использовался для описания акустики упругих пористых сред [3].

Работа выполнена по государственному заданию ИГМ СО РАН.

2. Постановка задачи

В статье рассматривается осесимметричная задача о импульсном воздействии квазистационарного магнитного поля на насыщенную пористую среду, окружающую канал с насыщающей жидкостью [4]. Вдоль канала система рассматривается однородной. В цилиндрических координатах (r, φ, z) для полупространства (R_1, ∞) скорость пористой матрицы $\mathbf{u} = (0, u_\varphi, u_z)$, скорость насыщающей жидкости $\mathbf{v} = (0, v_\varphi, v_z)$ и магнитное поле $\mathbf{B} = (0, B_\varphi, B_z)$ удовлетворяют следующей начально-краевой задаче. Система определяющих уравнений, полученная в рамках совмещенной теории электромагнетизма в пористых флюидонасыщенных средах [5, 6], имеет вид

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = c_t^2 \frac{\partial}{\partial r} (L u_\varphi) - \varepsilon \bar{\omega} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} \right) + \frac{\alpha \varepsilon c_e}{4\pi\sigma} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = c_t^2 L \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} \right) - \varepsilon \bar{\omega} \left(\frac{\partial u_z}{\partial t} - \frac{\partial v_z}{\partial t} \right) - \frac{\alpha \varepsilon c_e}{4\pi\sigma} L \left(\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} \right), \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \bar{\omega} (u_\varphi - v_\varphi) + \frac{B_0}{4\pi\rho_l r} L B_\varphi - \frac{\alpha c_e}{4\pi\sigma} \frac{\partial B_z}{\partial r}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \bar{\omega} (u_z - v_z) + \frac{B_0}{4\pi\rho_l r} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\alpha c_e}{4\pi\sigma} L B_\varphi, \quad (4)$$

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{c_e^2}{4\pi\sigma} L B_\varphi - \frac{\alpha c_e \rho_l}{\sigma} (u_z - v_z) + v_\varphi \frac{B_0}{r} \right), \quad (5)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = L \left(\frac{c_e^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\alpha c_e \rho_l}{\sigma} (u_\varphi - v_\varphi) + v_z \frac{B_0}{r} \right). \quad (6)$$

Граница $r = R_1$ считается свободной от напряжений и задана магнитное поле

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial r} = 0, \quad B_\varphi = 0, \quad B_z = B_{z0}(t), \quad (7)$$

начальные данные Коши принимаются нулевыми.

В формулах (1)–(7) $\rho = \rho_l + \rho_s$; ρ_s, ρ_l – парциальные плотности матрицы и жидкости; u, v – скорости матрицы и жидкости; B – магнитная индукция; σ – электропроводность; $\bar{\omega} = \rho_l \chi$, χ – коэффициент трения; α – электроакустический параметр; $\bar{\chi} = \chi - \alpha^2/\sigma$; A_t – скорость звука; c_e – скорость света. Постоянное магнитное поле $B_0 = (B_0/r, 0, 0)$ направлено вдоль оси Or . Оператор L определен соотношением

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}.$$

4. Алгоритм решения задачи

Для решения задачи (1)–(7) применяется интегральное преобразование Лагерра по времени

$$\vec{W}_m(x_1, x_2) = \int_0^\infty \vec{W}(x_1, x_2, t)(ht)^{-\frac{\alpha}{2}} l_m^\alpha(ht) d(ht),$$

с формулами обращения

$$\vec{W}(x_1, x_2, t) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{m!}{(m+\alpha)!} \vec{W}_m(x_1, x_2) l_m^\alpha(ht),$$

где $l_m^\alpha(ht)$ — функции Лагерра, которые выражаются через классические ортонормированные многочлены Лагерра $L_m^\alpha(ht)$ [7]. В данной статье параметр α выбирается целым и положительным. Тогда

$$l_m^\alpha(ht) = (ht)^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{ht}{2}} L_m^\alpha(ht).$$

Для первой производной полиномов Лагерра по переменной t справедливо следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} L_m^\alpha(ht) = -h \sum_{k=0}^{m-1} L_k^\alpha(ht).$$

Можно заметить, что для удовлетворения начальным условиям задачи (1)–(7) достаточно выбрать значение $\alpha \geq 1$. Для удобства расчетов выберем α целым. Кроме того, в формулах введен параметр сдвига $h > 0$, смысл и эффективность применения которого подробно обсуждается в работах [8, 9].

В результате данного преобразования исходная задача сводится к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в спектральной области:

$$\frac{h^2}{4} u_\varphi^m - c_i^2 \frac{d}{dr} L u_\varphi^m + \varepsilon \bar{\omega} \frac{h}{2} (u_\varphi^m - v_\varphi^m) - \frac{\varepsilon \alpha A_e h}{4\pi\sigma} \frac{dB_z^m}{dr} = f_1^m, \quad (8)$$

$$\frac{h^2}{4} u_z^m - c_i^2 L \frac{du_z^m}{dr} u_\varphi^m + \varepsilon \bar{\omega} \frac{h}{2} (u_z^m - v_z^m) + \frac{\varepsilon \alpha A_e h}{4\pi\sigma} \frac{dB_\varphi^m}{dr} = f_2^m, \quad (9)$$

$$\frac{h}{2} v_\varphi^m - \bar{\omega} (u_\varphi^m - v_\varphi^m) - \frac{B_0}{4\pi\sigma r} L B_\varphi^m + \frac{\alpha A_e}{4\pi\sigma} \frac{dB_z^m}{dr} = -h \sum_{n=0}^{m-1} v_\varphi^n, \quad (10)$$

$$\frac{h}{2} v_z^m - \bar{\omega} (u_z^m - v_z^m) - \frac{B_0}{4\pi\rho_l r} \frac{dB_z^m}{dr} - \frac{\alpha A_e}{4\pi\sigma} L B_\varphi^m = -h \sum_{n=0}^{m-1} v_z^n, \quad (11)$$

$$\frac{h}{2} B_\varphi^m - \frac{d}{dr} \left(\frac{A_e^2}{4\pi\sigma} L B_\varphi^m - \frac{\alpha A_e \rho_l}{\sigma} (u_z^m - v_z^m) + v_\varphi^m \frac{B_0}{r} \right) = -h \sum_{n=0}^{m-1} B_\varphi^n, \quad (12)$$

$$\frac{h}{2} B_z^m - L \left(\frac{A_e^2}{4\pi\sigma} \frac{dB_z^m}{dr} + \frac{\alpha A_e \rho_l}{\sigma} (u_\varphi^m - v_\varphi^m) + v_z^m \frac{B_0}{r} \right) = -h \sum_{n=0}^{m-1} B_z^n, \quad (13)$$

с граничными условиями

$$\left. \frac{\partial u_\varphi^m}{\partial r} - \frac{u_\varphi^m}{r} \right|_{r=R_1} = 0, \quad \left. \frac{\partial u_z^m}{\partial r} \right|_{r=R_1} = 0, \quad B_\varphi^m|_{r=R_1} = 0, \quad B_z^m|_{r=R_1} = B_{z0}(t). \quad (14)$$

Здесь f_1^m, f_2^m — коэффициенты разложения функции источника $f(t)$ по Лагерру

$$f_1^m = -h^2 \sum_{n=0}^{m-1} (m-n) u_\varphi^n - h \varepsilon \bar{\omega} \sum_{n=0}^{m-1} (u_\varphi^n - v_\varphi^n) + \frac{h \varepsilon \alpha A_e}{4\pi\sigma} \sum_{n=0}^{m-1} \frac{dB_z^n}{dr},$$

$$f_2^m = -h^2 \sum_{n=0}^{m-1} (m-n)u_z^n - h\varepsilon\bar{\omega} \sum_{n=0}^{m-1} (u_z^n - v_z^n) - \frac{h\varepsilon\alpha A_e}{4\pi\sigma} \sum_{n=0}^{m-1} LB_\varphi^n,$$

u_i^m, v_i^m, B_i^m — коэффициенты разложения соответствующих компонент поля в ряд по функциям Лагерра. Верхний индекс m означает номер коэффициента в разложении по Лагерру. Отметим, что значение m присутствует явно только в правой части уравнений в виде рекуррентной зависимости для всех компонент поля.

Конечно-разностная аппроксимация производных по пространственным координатам для решения данной задачи проводится на сдвинутых сетках с четвертым порядком точности [10]. Для этого в расчетной области в направлении координаты $r=r_1$ вводятся сетки ωr_1 и $\omega r_{1/2}$ с шагом дискретизации Δr , сдвинутые относительно друг друга на $\Delta r/2$:

$$\omega r_1 = (j\Delta r, t), \quad \omega r_{1/2} = \left(j\Delta r + \frac{\Delta r}{2}, t \right), \quad j=0, \dots, M.$$

Определим искомые компоненты вектора решения в следующих узлах сеток:

$$u_\varphi^m(r), v_\varphi^m(r), B_\varphi^m(r) \in \omega r_1, \quad u_r^m(r), v_r^m(r), B_r^m(r) \in \omega r_{1/2}.$$

Выбор расположения компонент в целых и полуцелых узлах сетки осуществляется на основе разностной аппроксимации уравнений системы (8)–(13) и удовлетворения граничным условиям (14), для аппроксимации которых используется второй порядок точности.

В результате конечно-разностной аппроксимации задачи (8)–(14) получим систему линейных алгебраических уравнений. Представляя искомый вектор решения \vec{W} в виде

$$\vec{W}(m) = (\vec{V}_0(m), \vec{V}_1(m), \dots, \vec{V}_M(m))^T,$$

$$\vec{V}_i = (u_\varphi^j, u_r^{j+\frac{1}{2}}, v_\varphi^j, v_r^{j+\frac{1}{2}}, B_\varphi^j, B_r^{j+\frac{1}{2}})^T,$$

данная система линейных алгебраических уравнений может быть записана в виде

$$\left(A_\Delta + \frac{h}{2}E \right) \vec{W}(m) = \vec{F}_\Delta(m-1). \quad (15)$$

Последовательность компонент волнового поля в векторе решения \vec{V} выбирается с учетом минимизации количества диагоналей в матрице A_Δ . При этом на главной диагонали матрицы специально располагаются компоненты, входящие в уравнения системы как слагаемые, имеющие в качестве множителя параметр h . Следует отметить, что за счет выбора параметра h имеется возможность существенно улучшить обусловленность матрицы системы. Решив систему линейных алгебраических уравнений (15), можно определить спектральные значения для всех компонент волнового поля $\vec{W}(m)$. Затем, воспользовавшись

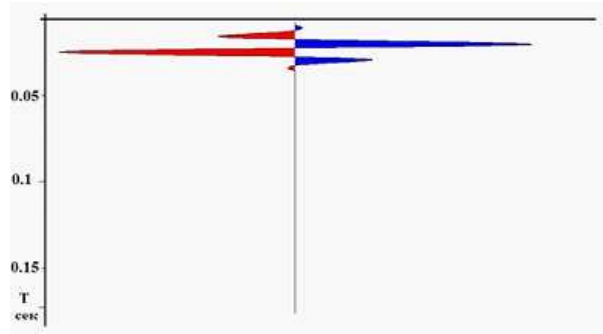
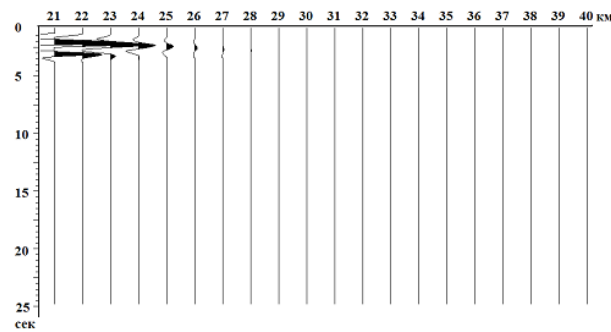
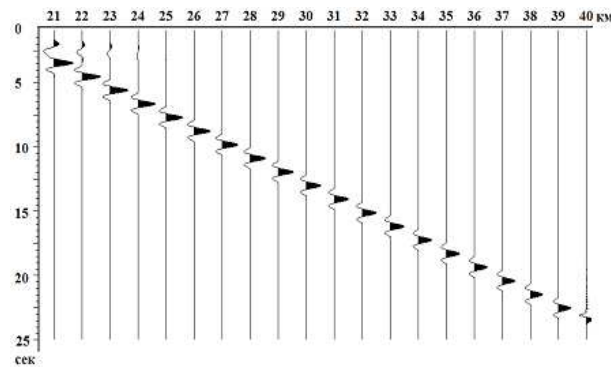


Рис. 1. Сигнал в источнике (исходный сигнал).

Рис. 2. Расчетные трассы распространения магнитоупругой волны для компоненты B_z .Рис. 3. Расчетные сеймотрассы для компоненты скорости смещения u_z .

формулой обращения преобразований Лагерра, получить решение исходной задачи (1)–(7).

Для решения системы линейных алгебраических уравнений (15) наиболее эффективным оказалось использование итерационного метода сопряженных градиентов. Преимуществом этого метода является отсутствие необходимости хранения всей матрицы в машинной памяти для систем большой размерности, а также быстрая сходимость к решению задачи при условии хорошей обусловлен-

ности матрицы системы. Наша матрица A_{Δ} обладает этим свойством за счет параметра h . Выбором h можно существенно ускорить сходимость итерационного процесса. Оптимальное значение h выбирается исходя из минимизации количества гармоник Лагерра в формуле обращения, а также уменьшения количества итераций при нахождении решения для каждой гармоники. Анализ тестовых расчетов показывает устойчивость представленного алгоритма для исследуемого класса модели.

5. Результаты моделирования

Решение представленной задачи дает основу для разработки технологических методов измерения проницаемости и электропроводности породы [4, 11–13]. В модельной задаче рассматривалась среда со следующими физическими параметрами (система СГС): $\alpha = 10^7 (A <^3/3 A^2)^{1/2}$, $R_1 = 10A <$, $\sigma = 10^9 c^{-1}$, $\varpi = 10^7 c^{-1}$, $B_0 = 10^3$, $\rho_l = 0.13/A <^3$, $c_e = 3 \cdot 10^{10} A </A$, $c_t = 1 \cdot 10^5 A </A$, $\varepsilon = 0.1$. На границе канала задавалось импульсное воздействие как функция времени. Координата точки источника $r_0=20$ км. Задаваемый исходный сигнал $B_{z0}(t) = 10^3 \exp(-\pi f_0(t-t_0)^2/8) \sin(2\pi f_0(t-t_0))$, где $f_0 = 100$ Гц, $t_0 = 0.015$ сек. где $f_0 = 100$ Гц, $t_0 = 0.015$ сек. представлен на рис. 1.

На рис. 2, 3 представлены расчетные сейсмотрассы компонент магнитного поля и скорости смещений пористой матрицы. Расстояние по координате r между точками расчетных трасс $\Delta r = 50$ метров. Результаты расчетов компоненты магнитного B_z и скорости смещений пористой матрицы u_z представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

6. Заключение

Рассмотрен численно-аналитический алгоритм, основанный на спектральном методе Лагерра, в применении к задаче анализа акустического отклика пористой насыщенной среды на индукционное внешнее воздействие во внешнем магнитном поле. Данный алгоритм является аналогом известных спектральных методов решения динамических задач механики сплошных сред, однако, в отличие от преобразований Фурье и Лапласа, применение преобразования Лагерра приводит к системе уравнений, в которой параметр разделения по гармоникам входит только в правую часть в рекуррентном виде. В результате матрица системы сведенной задачи имеет хорошую обусловленность. Этот факт позволяет использовать эффективные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mikhailenko B. G.* Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems // Appl. Math. Letters. 1999. N 12. P. 105–110.
2. *Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V.* Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // Pure Appl. Geophys. 2003. N 160. P. 1207–1224.

3. Имомназаров Х. Х., Михайлов А. А. Применение спектрального метода для численного моделирования сейсмических волн в пористых средах при наличии диссипации энергии // Сиб журн. вычисл. математики. 2014. Т. 17, № 2. С. 139–147.
4. Имомназаров Ш. Х., Доровский В. Н. Магнитозвуковые колебания в скважинных условиях, определяющие электрокинетические параметры пористой насыщенной среды // Интерэкспо ГЕО-Сибирь-2017. XI Междунар. науч. конгр., Новосибирск: Междунар. науч. конф. «Дистанционные методы зондирования Земли и фотограмметрия, мониторинг окружающей среды, геоэкология». 2017. Т. 1. С. 186–190.
5. Dorovsky V. N., Imomnazarov Kh. Kh. A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium // Math. Comput. Modelling. 1994. V. 20, N. 7. P. 91–97.
6. Доровский В. Н., Доровский С. В. Электромагнитоакустический метод измерения электропроводности и дзета-потенциала // Геология и геофизика. 2009. Т. 50. С. 735–744.
7. Копыух Г. В., Михайленко В. Г. Application of integral Laguerre transformation for solving dynamic seismic problem // Bull. Of the Novosibirsk Computing Center, series: Mathematical Modeling in Geophysics, Novosibirsk. 1998. N 4. P. 79–91.
8. Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V. Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method // Pure Appl. Geophys. 2003. N 160. P. 1207–1224.
9. Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., Reshetova G. V. Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method // Geophys. Prospecting. 2003. N 51. P. 37–48.
10. Levander A. R. Fourth order velocity-stress finite-difference scheme // Proc. 57-th SEG Annual Meeting. New Orleans. 1987. P. 234–245.
11. Dorovsky V. N., Nefedkin Y. A., Fedorov A. I., Podberezheny M. Y. A logging method for estimating permeability, velocity of second compressional wave, and electroacoustic constant in electrolyte-saturated porous formations // Russian Geology and Geophysics. 2010. V. 51, N 12. P. 1285–1294.
12. Dorovsky V., Dubinsky V., Fedorov A., Podberezheny M., Nefedkin Yu., Perepechko Yu. Method and apparatus for estimating formation permeability and electroacoustic constant of an electrolyte-saturated multilayered rock taking into account osmosis. Patent Application Publication US 2010/0254218 A1. Oct. 7, 2010.
13. Dorovsky V. N., Podberezheny M., Nefedkin Y. Stoneley attenuation length and pore fluid salinity // Russian Geology and Geophysics. 2011. V. 52. N 2. P. 250–258.

Поступила в редакцию 1 февраля 2021 г.

После доработки 25 февраля 2021 г.

Принята к публикации 26 мая 2021 г.

Имомназаров Шерзад Холматжонович
Институт геологии и минералогии СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 6, Новосибирск 630090
sh.imomnazarov@gmail.com

Михайлов Александр Анатольевич
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 6, Новосибирск 630090
alex_mikh@omzg.sccc.ru

THE LAGUERRE SPECTRAL METHOD
FOR SOLVING A ONE-DIMENSIONAL DYNAMICAL
PROBLEM OF MAGNETO-POROELASTICITY

Sh. Imomnazarov and A. Mikhailov

Abstract: The paper illustrates the applicability of the Laguerre spectral method to solving a one-dimensional problem of magneto-poroelasticity with the electrokinetic coefficient taken into consideration. We study a one-dimensional non-stationary problem of pulsed action on a saturated porous medium taking into account the effects of electro-magnetoacoustics. The features of the acoustic response to the pulsed electromagnetic action in such system are numerically discovered. We show the dependence of the amplitudes of transverse acoustic waves arriving at the boundary of the porous medium on the external magnetic field for various parameters of the porous medium.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.46.60.007

Keywords: saturated porous medium, Laguerre transform, interfacial friction, magneto-sonic oscillations.

REFERENCES

1. *Mikhailenko B. G.* "Spectral Laguerre method for the approximate solution of time dependent problems," *Appl. Math. Lett.*, No. 12, 105–110 (1999).
2. *Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., and Reshetova G. V.*, "Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method," *Pure Appl. Geophys.*, No. 160, 1207–1224 (2003).
3. *Imomnazarov Kh. Kh. and Mikhailov A. A.*, "Application of a spectral method for numerical modeling of propagation of seismic waves in porous media for dissipative case [in Russian]," *Sib. J. Num. Math., Sib. Branch Russ. Acad. Sci., Novosibirsk*, **17**, No. 2, 139–147 (2014).
4. *Imomnazarov Sh. Kh. and Dorovsky V. N.*, "Downhole magnetoacoustic oscillations determining the electrokinetic parameters of saturated porous medium [in Russian]," in: *Interexpo Geo-Siberia-2017*, **4**, No. 1, 186–190, Novosibirsk (2017).
5. *Dorovsky V. N. and Imomnazarov Kh. Kh.*, "A mathematical model for the movement of a conducting liquid through a conducting porous medium," *Math. Comput. Model.*, **20**, No. 7, 91–97 (1994).
6. *Dorovsky V. N. and Dorovsky S. V.*, "An electromagnetoacoustic method of measuring electric conductivity and ζ -potential [in Russian]," *Geology Geophys.*, **50**, 735–744 (2009).
7. *Konyukh G. V. and Mikhailenko B. G.*, "Application of integral Laguerre transformation for solving dynamic seismic problem," *Bull. Novosibirsk Computing Center, Ser. Math. Model. Geophys.*, No. 4, 79–91 (1998).
8. *Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., and Reshetova G. V.*, "Numerical modeling of transient seismic fields in viscoelastic media based on the Laguerre spectral method," *Pure Appl. Geophys.*, No. 160, 1207–1224 (2003).
9. *Mikhailenko B. G., Mikhailov A. A., and Reshetova G. V.*, "Numerical viscoelastic modeling by the spectral Laguerre method," *Geophys. Prospect.*, No. 51, 37–48 (2003).

10. Levander A. R., "Fourth order velocity-stress finite-difference scheme," Proc. 57th SEG Annu. Meeting, New Orleans, 234–245 (1987).
11. Dorovsky V. N., Nefedkin Y. A., Fedorov A. I., and Podberezhnny M. Y., "A logging method for estimating permeability, velocity of second compressional wave, and electroacoustic constant in electrolyte-saturated porous formations," Russ. Geology Geophys., **51**, No. 12, 1285–1294 (2010).
12. Dorovsky V., Dubinsky V., Fedorov A., Podberezhnny M., Nefedkin Yu., and Perepechko Yu., Method and Apparatus for Estimating Formation Permeability and Electroacoustic Constant of an Electrolyte-Saturated Multilayered Rock Taking into Account Osmosis, Patent Appl. Publ. US 2010/0254218 A1, Oct. 7, 2010.
13. Dorovsky V. N., Podberezhnny M., and Nefedkin Y., "Stoneley attenuation length and pore fluid salinity," Russ. Geology Geophys., **52**, No. 2, 250–258 (2011).

Submitted February 1, 2021

Revised February 25, 2021

Accepted May 26, 2021

Sherzad Kh. Imomnazarov
Institute of Geology and Geophysics,
6 Akad. Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
sh.imomnazarov@gmail.com

Alexander A. Mikhailov
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics,
6 Lavrentiev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
alex_mikh@omzg.ssc.ru