Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2021. Том 28, № 2

УДК 541.124+517.9

ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ НЕВЫРОЖДЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Л. И. Кононенко

Аннотация. Предложен алгоритм итерационного приближенного решения обратной задачи для нахождения коэффициентов в правой части системы дифференциальных уравнений с малым параметром в невырожденном случае ($\varepsilon \neq 0$). Алгоритм состоит в комбинировании на каждом шаге итерации решения обратной задачи для исследованного случая $\varepsilon = 0$ и решения прямой задачи, которое сводится к доказательству существования и единственности решения в случае $\varepsilon \neq 0$. Доказана теорема о сходимости предлагаемого алгоритма с использованием принципа сжимающих отображений.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.58.21.001

Ключевые слова: обратная задача, обыкновенные дифференциальные уравнения, малый параметр, принцип сжимающих отображений, химическая кинетика.

1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $X := \mathbb{R}^m$, Y — область в $\mathbb{R}^n$, $T := \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon_0 \in \mathbb{R}$. Положим $E := \{\varepsilon \in \mathbb{R} : 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_0\}$, $F := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^m)$, $G := C(X \times Y \times T \times E, \mathbb{R}^n)$.

Рассмотрим задачу P с областью данных $\operatorname{Dom} P = F \times G \times E$, областью искомых $\operatorname{Im} P = C^1(T, X) \times C^1(T, Y)$ и условием

$$P((f, g, \varepsilon), (x, y)) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), y(t), t, \varepsilon), \\ \varepsilon\, \dot{y}(t) = g(x(t), y(t), t, \varepsilon) \end{cases} \text{для всех } t \in T,$$

где $f \in F$, $g \in G$, $\varepsilon \in E$, $x \in C^1(T, X)$, $y \in C^1(T, Y)$ [1, 2].

Задача P является прямой задачей: по известным правым частям системы находим решение $x(t)$, $y(t)$ системы или доказываем его существование и единственность.

Такая задача P исследуется методом интегральных многообразий [3–6], который служит удобным аппаратом изучения многомерных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, позволяющим понижать размерность рассматриваемых систем.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.2 (проект № 0314–2019–0007).

В задаче P числу ε отводится роль «малого параметра», что приводит к разделению системы на «медленную» и «быструю» подсистемы:

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big) \quad \text{и} \quad \varepsilon\, \dot{y}(t) = g\big(x(t), y(t), t, \varepsilon\big). \tag{1}$$

Приведем необходимые сведения о методе интегральных многообразий для системы (1).

Гладкая поверхность S в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ называется *интегральным многообразием* системы (1), если любая траектория этой системы, имеющая хотя бы одну общую точку с S, целиком принадлежит поверхности S. Формально если при $t = t_0$ точка $(x(t_0), y(t_0), t_0) \in S$, то траектория $(x(t), y(t), t)$ целиком принадлежит S.

Если в системе (1) положить $\varepsilon = 0$, то получим *порождающую* или *вырожденную* систему

$$\dot{x} = f(x, y, t, 0), \tag{2}$$

$$0 = g(x, y, t, 0). \tag{3}$$

Уравнение $g(x, y, t, 0) = 0$ задает *медленную поверхность.* Это уравнение медленной поверхности может иметь одно или несколько решений, каждое из которых задает *лист медленной поверхности.*

Листы интегрального многообразия медленных движений (или медленного интегрального многообразия) являются уточнением при учете малого параметра ε листов медленной поверхности и получаются из них с помощью асимптотического разложения по степеням ε:

$$h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t) + \varepsilon h_1(x, t) + \cdots + \varepsilon^k h_k(x, t) + \cdots, \tag{4}$$

где коэффициенты разложения $h_k(x, t)$ подсчитываются по рекуррентной формуле, приведенной, например, в [5]:

$$\begin{gathered} h_k = -B^{-1}\left[g^{(k)} - \frac{\partial h_{k-1}}{\partial t} - \sum_{p=0}^{k-1} \frac{\partial h_p}{\partial x} f^{(k-1-p)}\right], \\ B = \det\left(\frac{\partial g}{\partial y}\big(x, h_0(x, t), t, 0\big)\right) \neq 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Среди интегральных многообразий системы (1) нас интересуют m-мерные интегральные многообразия (размерность медленных переменных), которые представимы в виде графика вектор-функции $y = h(x, t, \varepsilon)$.

Выполняется соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} h(x, t, \varepsilon) = h_0(x, t),$$

где $h_0(x, t)$ — функция, график которой является листом медленной поверхности.

Нахождение решения системы (1) сводится к отысканию решения вырожденной системы (2), (3), получаемой из исходной, если параметр ε формально положить равным нулю. Этот факт следует из работ А. Н. Тихонова (например, [7]), в которых доказаны теоремы о предельном переходе к решению вырожденной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Правые части системы (1) являются достаточно гладкими функциями, поэтому удовлетворяют требуемым условиям, в частности, обеспечивают единственность решения.

2. Существование интегрального многообразия медленных движений для системы (1) доказано в [5]. Приведем соответствующую теорему и постановку прямой задачи. Заметим, что термин «прямая задача» обычно употребляется в контексте с «обратной задачей», а в остальных случаях говорят просто «задача».

Пусть для системы (1) выполнены следующие условия.

I. Уравнение $g(x,y,t,0)=0$ имеет изолированное решение $y=h_0(x,t)$ при $t\in\mathbb{R}$, $x\in\mathbb{R}^m$.

II. В области $\Omega_0=\{(x,y,t,\varepsilon)\mid x\in\mathbb{R}^m,\ \|y-h_0(x,t)\|<\rho,\ t\in\mathbb{R},\ 0\le\varepsilon\le\varepsilon_0\}$ функции f, g и h_0 равномерно непрерывны и ограничены вместе с частными производными по переменным до $(k+2)$-го порядка включительно ($k\ge 0$).

III. Собственные значения $\lambda_i(x,t)$ $(i=1,\dots,n)$ матрицы $\frac{\partial g}{\partial y}(x,h_0(x,t),t,0)$ подчиняются неравенству $\operatorname{Re}\lambda_i(x,t)\le-2\gamma<0$.

Требуется по заданным функциям $f(x,y,t,\varepsilon)$, $g(x,y,t,\varepsilon)$ в правой части системы (1) найти $x(t)$, $y(t)$ в некоторой области Ω_0 или доказать существование решения $x(t)$, $y(t)$.

Теорема 1 (Гольдштейн — Соболев). *Пусть выполняются условия* I–III. *Тогда существует такое* ε_1 $(0<\varepsilon_1\le\varepsilon_0)$, *что для каждого* $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ *система* (1) *имеет интегральное многообразие медленных движений* $y=h(x,t,\varepsilon)$, *представленное формулой* (4) *с коэффициентами* (5), *движение по которому описывается уравнением*

$$\dot{x}=f\bigl(x,h(x,t,\varepsilon),t,\varepsilon\bigr).$$

Если $x(t)$ — решение этого уравнения, то пара $x(t)$, $y(t)$, где $y(t)=h(x,t,\varepsilon)$, является решением исходной системы (1), т. е. пара $x(t)$, $y(t)$ есть решение прямой задачи.

В качестве примеров прямой задачи были рассмотрены две модели из химической кинетики: математическая модель реактора идеального смешения и математическая модель каталитической реакции окисления CO на иридии [8, 9].

I. Математическая модель реактора идеального смешения. Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающая бимолекулярную реакцию на поверхности катализатора

$$\dot{x}_1=a-x_1-\alpha[\omega_1+(\omega_3-\omega_1-\omega_2)x_1],$$

$$\dot{x}_2=b-x_2-\alpha[\omega_2+\omega_4+(\omega_3-\omega_1-\omega_2)x_2],$$

$$\dot{y}_1=\beta(2\omega_1-\omega_3-\omega_4),\quad \dot{y}_2=\beta(\omega_2-\omega_3),$$

где $\omega_1 = \varkappa_1 x_1(1-y_1-y_2)^2 - \varkappa_{-1}y_1^2$, $\omega_2 = \varkappa_2 x_2(1-y_1-y_2) - \varkappa_{-2}y_2$, $\omega_3 = y_1y_2$, $\omega_4 = \varkappa_4 x_2 y_1$ — обезразмеренные скорости четырех стадий реакции.

Областью изменения переменных является множество

$$W = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \mid 0 \le x_1 \le a,\ 0 \le x_2 \le b,\ 0 \le y_1,\ 0 \le y_2,\ y_1 + y_2 \le 1\}.$$

Скорость реакции на поверхности катализатора существенно выше, чем скорости адсорбции. Предполагается, что основным механизмом реакции является адсорбционный, а ударный механизм учитывается как дополнительный. Поэтому мы используем при анализе модели следующую иерархию параметров:

$$\varkappa_{-2}, \varkappa_{-1}, \varkappa_4 \ll \varkappa_1, \varkappa_2 \ll 1.$$

Константы десорбции предполагаются малыми сравнительно с константами адсорбции. Кроме того, $\alpha \ll \beta$ и $\varepsilon = 1/\beta \ll \varkappa_{-2}, \varkappa_{-1}, \varkappa_4$.

II. Математическая модель каталитической реакции окисления. Рассматривается детальный механизм реакции $CO + O_2$ на иридии. Кинетической схеме этой реакции соответствует система дифференциальных уравнений с безразмерными переменными

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 2b_1x_7^2 - b_2x_6x_1 - b_8x_1x_2,\\
\dot{x}_2 &= b_4x_7 - b_5x_2 - b_8x_1x_2 - b_9x_2x_3 - b_{12}x_2x_4,\\
\dot{x}_3 &= b_2x_6x_1 - 2b_3x_3^2 - b_6x_3 + b_7x_5 - b_9x_2x_3 + 2b_{10}x_4x_5 + b_{12}x_2x_4,\\
\dot{x}_4 &= 2b_3x_3^2 - b_{10}x_4x_5 - b_{12}x_2x_4,\\
\dot{x}_5 &= b_6x_3 - b_7x_5 - b_{10}x_4x_5 - b_{11}x_5,
\end{aligned}$$

где $x_6 = 1 - x_3 - x_4 - x_5$, $x_7 = 1 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5$.

Приведены выражения для коэффициентов b_i $(i = 1, 2, \dots, 12)$. Областью изменения переменных является множество

$$W = \left\{(x_1, \dots, x_5) \mid 0 \le x_i \le 1, \sum_{j=1}^{5} x_j \le 1, i = 1, \dots, 5\right\}.$$

При анализе модели используем следующую иерархию параметров:

$$b_{10} > b_8 \gg b_7 > b_1, b_2, b_3, b_4, b_6, b_{11}, b_{12} \gg b_5, b_9.$$

3. Приведем постановку обратной задачи (вырожденный случай). Для упрощения исследования обратной задачи для системы (1) введены следующие ограничения:

1) рассматривается обратная задача для системы (1) при $\varepsilon = 0$, т. е. для вырожденной системы (2), (3); тесная связь с вырожденной системой мотивирует рассмотрение случая $\varepsilon = 0$;

2) функция f в правой части медленной подсистемы системы (1) задается в виде многочлена p-й степени $f = \sum\limits_{i+j \le p} b_{ij}x^iy^j$, так как в задачах химической

кинетики правые части системы часто являются полиномами, более того, будем рассматривать многочлен первой степени;

3) рассматриваются системы с одной медленной и одной быстрой переменными, т. е. $m = n = 1$; при этом область изменения переменных

$$W = \{(x, y) \mid 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, x + y \le 1\}; \tag{6}$$

4) функцию $g(x, y, t, \varepsilon)$ считаем заданной и удовлетворяющей всем условиям теоремы о неявной функции в каждой точке области, в частности, $\frac{\partial g(x,y,t,0)}{\partial y} \ne 0$, следовательно, при $\varepsilon = 0$ медленная поверхность, уравнение которой $g(x, y, t, 0) = 0$, задана;

5) медленная поверхность состоит из одного листа.

Задача, обратная к P, состоит в нахождении неизвестных правых частей системы дифференциальных уравнений по некоторым данным о решении прямой задачи P. Обратные задачи для различных систем дифференциальных уравнений рассматривались, например, в [10–15].

Замечание. Если задача P моделирует какой-либо реальный физический процесс, то рассмотрение обратной задачи P^{-1} мотивировано поиском относительно простого формального закона, описывающего этот процесс с приемлемой точностью. Данными обратной задачи служат экспериментально измеряемые характеристики процесса, а искомыми являются, например, коэффициенты возможного дифференциального уравнения, описывающего наблюдаемый процесс.

В случае, когда в основе задачи P лежит функциональное уравнение, с формальной точки зрения данными обратной задачи P^{-1} оказываются функции соответствующего класса, в то время как на практике в роли данных обратной задачи выступают не сами функции, а те или иные их характеристики, поддающиеся измерению, т. е. конечные наборы чисел.

Соответствующая корректировка обратной задачи реализуется посредством композиции задачи P^{-1} и простой вспомогательной задачи, формализующей связь между функциями и их измеряемыми характеристиками. Пример такой корректирующей композиции приведен в [1, 2].

В [1, 16] рассматривался вырожденный случай и была решена обратная задача для системы (1). Напомним его.

Рассмотрим частный случай задачи P, в котором $m = n = 1$, $E = \{0\}$, функции $f \in F$ являются многочленами первой степени, а $g \in G$ удовлетворяет условиям теоремы о неявной функции, и поэтому уравнение

$$g(x(t), y(t), t, 0) = 0$$

можно заменить уравнением вида

$$y(t) = h(x(t), t).$$

В результате возникает следующая задача.

Пусть $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$. Рассмотрим задачу Q с областью данных $\operatorname{Dom} Q = \mathbb{R}^3$, областью искомых $\operatorname{Im} Q = C^1(\mathbb{R})^2$ и условием

$$Q(f,(x,y)) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \dot{x}(t) = f_1 + f_2 x(t) + f_3 y(t), \\ y(t) = h\bigl(x(t),t\bigr) \end{cases} \text{для всех } t \in \mathbb{R},$$

где $f = (f_1, f_2, f_3) \in \mathbb{R}^3$, $x, y \in C^1(\mathbb{R})$.

Обратная к Q задача Q^{-1}, формально соответствующая определению и имеющая пары функций $(x,y) \in C^1(\mathbb{R})^2$ в качестве данных, очень проста и не соответствует практике. В роли данных более адекватны конечные наборы значений функций или их производных, а не всюду определенные функции. Соответствующая корректировка обратной задачи реализуется посредством композиции задачи Q^{-1} и вспомогательной задачи R с областью данных $\operatorname{Dom} R = (\mathbb{R}^3)^3$, областью искомых $\operatorname{Im} R = C^1(\mathbb{R})^2$ и условием

$$R((t,\alpha,\beta),(x,y)) \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x(t_1) = \alpha_1, \quad x(t_2) = \alpha_2, \quad x(t_3) = \alpha_3, \\ \dot{x}(t_1) = \beta_1, \quad \dot{x}(t_2) = \beta_2, \quad \dot{x}(t_3) = \beta_3, \end{cases}$$

где $t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$, $x, y \in C^1(\mathbb{R})$.

По сравнению с формальной обратной задачей Q^{-1} композиция $Q^{-1} \circ R$ более практична и представляет собой следующую задачу: по данным $t, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$ найти коэффициенты $f \in \mathbb{R}^3$, для которых существуют функции $x, y \in C^1(\mathbb{R})$, удовлетворяющие условию

$$\begin{cases} x(t_1) = \alpha_1,\ x(t_2) = \alpha_2,\ x(t_3) = \alpha_3, \\ \dot{x}(t_1) = \beta_1,\ \dot{x}(t_2) = \beta_2,\ \dot{x}(t_3) = \beta_3, \\ \dot{x}(t) = f_1 + f_2 x(t) + f_3 y(t) \ \text{ для всех } t \in \mathbb{R}, \\ y(t) = h\bigl(x(t),t\bigr) \ \text{ для всех } t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{7}$$

Сформулированный ниже результат получен в [16].

Теорема 2. *Если $t, \alpha \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяют условию*

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & h(\alpha_1, t_1) \\ 1 & \alpha_2 & h(\alpha_2, t_2) \\ 1 & \alpha_3 & h(\alpha_3, t_3) \end{vmatrix} \neq 0,$$

то при любых $\beta \in \mathbb{R}^3$ задача $Q^{-1} \circ R$ однозначно разрешима для данных (t, α, β) и ее решение $(f_1, f_2, f_3) = (Q^{-1} \circ R)^s(t, \alpha, \beta)$ вычисляется по классическим формулам Крамера

$$f_i = \Delta_i / \Delta, \tag{8}$$

где Δ_i — определитель матрицы, полученной из приведенной выше матрицы заменой i-го столбца столбцом $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$.

В [17] был доказан критерий, который позволяет выяснить, в каких случаях существует набор чисел t_i, удовлетворяющий условию теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, T — произвольное множество. Семейство функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n \colon T \to \mathbb{R}$ линейно независимо (в векторном пространстве $\mathbb{R}^T$) тогда и только тогда, когда существуют точки $t_1, \dots, t_n \in T$, удовлетворяющие условию*

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(t_1) & \varphi_2(t_1) & \dots & \varphi_n(t_1) \\ \varphi_1(t_2) & \varphi_2(t_2) & \dots & \varphi_n(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_n) & \varphi_2(t_n) & \dots & \varphi_n(t_n) \end{vmatrix} \neq 0.$$

4. Далее предлагается алгоритм, с помощью которого можно исследовать обратную задачу для системы (1) в невырожденном случае ($\varepsilon \neq 0$) с теми же ограничениями на правую часть системы, которые были наложены в вырожденном случае ($\varepsilon = 0$). Этот итерационный алгоритм состоит в комбинировании на каждом шаге итерации решения обратной задачи для исследованного случая $\varepsilon = 0$ и решения прямой задачи, которое обеспечивается теоремой существования и единственности при $\varepsilon \neq 0$.

Схема алгоритма такова.

Шаг 0. Используя начальные данные t_i^0, $x^0(t_i^0) = \alpha_i^0$, $\dot{x}^0(t_i^0) = \beta_i^0$, $i = 1, 2, 3$, по формуле (8) из теоремы 2 для вырожденного случая $\varepsilon = 0$, вычисляем коэффициенты правой части f_i^0, $i = 1, 2, 3$. Имея известную правую часть системы (1), делаем вывод о существовании решения невырожденной прямой задачи для этой системы на листе интегрального многообразия по теореме 1 [5] которое обозначим $x^1(t), y^1(t)$, где $y^1(t) = h(x^1(t), t)$.

Шаг 1. Принимаем найденное решение в точке t_i, $i = 1, 2, 3$ (t_i не будем менять, $t_i = t_i^0$) за начальные данные. Имеем

$$x^1(t_i) = \alpha_i^1 = \int\limits_0^{t_i} [f_1^1 + f_2^1 x^0(t) + f_3^1 h(x^0(t), t)]\, dt, \quad y^1(t_i) = h(x^1(t_i), t_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Находим f_i^1, $i = 1, 2, 3$, по формуле (8), и снова, имея известную правую часть системы (1) делаем вывод о существовании решения прямой задачи по теореме 1, которое обозначаем $x^2(t), y^2(t)$, где $y^2(t) = h(x^2(t), t)$.

Шаг k. Принимаем найденное решение $x^k(t), y^k(t)$ за начальные данные. Имеем

$$x^{k+1}(t_i) = \alpha_i^{k+1} = \int\limits_0^{t_i} [f_1^k + f_2^k x^k(t) + f_3^k h(x^k(t), t)]\, dt,$$
$$y^{k+1}(t_i) = h(x^{k+1}(t_i), t_i), \quad i = 1, 2, 3.$$

Предложенный итерационный процесс является разработкой подхода к доказательству теоремы существования и единственности решения обратной задачи в невырожденном случае. Доказав сходимость данного итерационного процесса, сделаем вывод о существовании решения обратной задачи в невырожденном случае.

Докажем сходимость алгоритма.

На шаге 0 алгоритма формулы (7) с начальными данными и формулу (8) для коэффициентов правой части системы (при $\varepsilon = 0$) перепишем с нуликом вверху, что означает нулевой шаг. Далее на k-м шаге алгоритма формулы будут иметь вид

$$x^k(t_i) = \alpha_i^k, \quad \dot{x}^k(t_i) = \beta_i^k, \quad y^k(t_i) = h_i^k = h(\alpha_i^k, t_i), \tag{9}$$

$$f_i^k = \Delta_i^k / \Delta^k, \quad i = 1, 2, 3; \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{10}$$

Заметим, что t_i^k оставляем равным $t_i^0 = t_i$.

В области W из (6) имеем следующие ограничения на начальные данные

$$\begin{gathered} 0 \le m_\alpha \le \alpha_i^k \le \mu_\alpha \le 1, \quad 0 \le m_\beta \le \beta_i^k \le \mu_\beta, \\ 0 \le m_\alpha \le h_i^k \le \mu_h \le 1, \quad i = 1, 2, 3;\ k = 0, 1, 2, \dots . \end{gathered} \tag{11}$$

Поясним этот факт. При $k = 0$ (на 0-м шаге) выбираем α_i^0, β_i^0, h_i^0 удовлетворяющими (11), а далее при $k = 1, 2, \dots$ эти неравенства имеют место в силу непрерывной зависимости решений от начальных данных в дифференциальном уравнении в указанной области.

Выпишем определители на k-м шаге алгоритма

$$\Delta^k = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1^k & h_1^k \\ 1 & \alpha_2^k & h_2^k \\ 1 & \alpha_3^k & h_3^k \end{pmatrix}, \quad \Delta_1^k = \det \begin{pmatrix} \beta_1^k & \alpha_1^k & h_1^k \\ \beta_2^k & \alpha_2^k & h_2^k \\ \beta_3^k & \alpha_3^k & h_3^k \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2^k = \det \begin{pmatrix} 1 & \beta_1^k & h_1^k \\ 1 & \beta_2^k & h_2^k \\ 1 & \beta_3^k & h_3^k \end{pmatrix}, \quad \Delta_3^k = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1^k & \beta_1^k \\ 1 & \alpha_2^k & \beta_2^k \\ 1 & \alpha_3^k & \beta_3^k \end{pmatrix}.$$

Посчитаем их значения и оценим в силу неравенств (11):

$$\Delta_1^k = \beta_1^k\big(\alpha_2^k h_3^k - \alpha_3^k h_2^k\big) + \beta_2^k\big(\alpha_3^k h_1^k - \alpha_1^k h_3^k\big) + \beta_3^k\big(\alpha_1^k h_2^k - \alpha_2^k h_1^k\big) \le 3\mu_\beta(\mu_\alpha\mu_h - m_\alpha m_h);$$

$$\Delta_2^k = \big(\beta_2^k h_3^k - \beta_3^k h_2^k\big) + \big(\beta_3^k h_1^k - \beta_1^k h_3^k\big) + \big(\beta_1^k h_2^k - \beta_2^k h_1^k\big) \le 3(\mu_\beta\mu_h - m_\beta m_h);$$

$$\Delta_3^k = \big(\alpha_2^k \beta_3^k - \alpha_3^k \beta_2^k\big) + \big(\alpha_3^k \beta_1^k - \alpha_1^k \beta_3^k\big) + \big(\alpha_1^k \beta_2^k - \alpha_2^k \beta_1^k\big) \le 3(\mu_\alpha\mu_\beta - m_\alpha m_\beta);$$

$$\Delta^k = \big(\alpha_2^k h_3^k - \alpha_3^k h_2^k\big) + \big(\alpha_3^k h_1^k - \alpha_1^k h_3^k\big) + \big(\alpha_1^k h_2^k - \alpha_2^k h_1^k\big) \le 3(\mu_\alpha\mu_h - m_\alpha m_h).$$

Обозначив

$$M_{\Delta_i} = \max\{3\mu_\beta(\mu_\alpha\mu_h - m_\alpha m_h), 3(\mu_\beta\mu_h - m_\beta m_h), 3(\mu_\alpha\mu_\beta - m_\alpha m_\beta)\},$$

имеем

$$\Delta_i^k \le M_{\Delta_i}, \quad i = 1, 2, 3,\ k = 0, 1, 2, \dots .$$

Поскольку в формуле (10) Δ^k стоит в знаменателе, будем считать, что все Δ^k, $k = 0, 1, 2, \dots$, на каждом шаге отделены от 0 положительным (для простоты) числом m_{Δ^k}. Это требовалось в теореме 2, когда мы рассматривали вырожденный случай ($\varepsilon = 0$), т. е. на нулевом шаге: $\Delta_0 \ge m_{\Delta^0} > 0$. Следовательно, имеем $\Delta^k \ge m_{\Delta^k} > 0$, так как определитель Δ^k не сильно отличается от Δ^0 в силу непрерывной зависимости от начальных данных в указанной области W. Тогда

$$\frac{1}{\Delta^k} \leq \frac{1}{m_{\Delta_k}}, \quad f_i^k = \frac{\Delta_i^k}{\Delta^k} \leq \frac{M_{\Delta_i}}{m_{\Delta^k}}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Тем самым доказали ограниченность f_i^k сверху, что важно для дальнейших оценок.

Снизу f_i^k можно оценить некоторым числом l_f, которое существенной роли не играет.

Таким образом,

$$l_f \leq f_i^k \leq L_f, \quad i = 1, 2, 3. \tag{12}$$

Далее будем доказывать существование и единственность этих коэффициентов f_i^k, $i = 1, 2, 3$, с помощью принципа сжимающих отображений [18]. Имеем

$$|h(x^k(t), t) - h(x^{k-1}(t), t)| \leq L_h |x^k(t) - x^{k-1}(t)|, \tag{13}$$

где $L_h = \sup\limits_{x,\tau} \left|\frac{\partial h(x,\tau)}{\partial t}\right|$, $x = x(t)$, $\tau = t$.

Вводим оператор

$$T(x^k, f) = T(x^k(t), f_1, f_2, f_3),$$

где $f = (f_1, f_2, f_3)$, по формуле

$$T(x^{k+1}, f) = \int\limits_0^\tau \left[f_1^k + f_2^k \cdot x^k(t) + f_3^k h(x^k(t), t)\right] dt.$$

Надо доказать:

1) $TA \subset A$, $A = \{(x^k, f^k) : x^k \in C^1(0, T), \|x^k\| \leq c_1; f^k \in \mathbb{R}^3, \|f^k\| < c_2\}$;

2) $|T(x^{k+1}, f^{k+1}) - T(x^k, f^k)| \leq L|(x^{k+1}, f^{k+1}) - (x^k, f^k)|$, $L < 1$.

Заметим, что все остальные условия принципа сжимающих отображений в нашей системе (1) выполняются. Действительно, $f^k \in \mathbb{R}^3$ — полное, множество $A = \{(x^k, f^k)\}$, где элементы ограничены, замкнуто (по крайней мере его замыкание). Осталось доказать утверждения 1, 2.

Введем норму

$$\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq \tau} |x(t)|.$$

Ясно, что утверждение 1 будет выполняться, так как правая часть системы (1) по предположению является полиномом, интегральный оператор T непрерывен, множество A в полном (конечном) пространстве является компактом, будучи замкнутым и ограниченным, и, следовательно, образ TA тоже компакт, $TA \subset A$. Начальные условия, т. е. множество A, можно выбрать так, чтобы это выполнялось.

Докажем утверждение 2.

Рассмотрим любые два элемента (x^{k+1}, f^{k+1}) и (x^k, f^k) из A и оценим расстояние между их образами. Мы имеем

$$D = |T(x^{k+1}, f^{k+1}) - T(x^k, f^k)|$$

$$\le \int_0^\tau \big\{\big|f_1^k - f_1^{k-1}\big| + \big|f_2^k x^k(t) - f_2^{k-1} x^{k-1}(t)\big| + \big|f_3^k h(x^k(t), t) - f_3^{k-1} h(x^{k-1}(t), t)\big|\big\}\, dt$$

$$\le \int_0^\tau \big\{\big|f_1^k - f_1^{k-1}\big| + \big(\big|f_2^k - f_2 x^{k-1}(t)\big| + \big|f_2 x^{k-1}(t) - f_2^{k-1} x^{k-1}(t)\big|\big)$$

$$+ \big(\big|f_3^k h(x^k(t), t) - f_3^k h(x^{k-1}(t), t)\big| + \big|f_3^k h(x^{k-1}(t), t) - f_3^{k-1} h(x^{k-1}(t), t)\big|\big)\big\}\, dt$$

$$\le \int_0^\tau \big\{\big|f_1^k - f_1^{k-1}\big| + \big|f_2^k\big|\big|x^k(t) - x^{k-1}(t)\big| + \big|x^{k-1}(t)\big|\big|f_2^k - f_2^{k-1}\big|$$

$$+ \big|f_3^k\big|\big|h(x^k(t), t) - h(x^{k-1}(t), t)\big| + \big|h(x^{k-1}(t), t)\big|\big|f_3^k - f_3^{k-1}\big|\big\}\, dt.$$

Используя оценки (11)–(13), имеем

$$D \le \int_0^\tau \big\{\big|f_1^k - f_1^{k-1}\big| + \mu_\alpha\big|f_2^k - f_2^{k-1}\big| + \mu_h\big|f_3^k - f_3^{k-1}\big| + L_f|x^k(t) - x^{k-1}(t)|$$

$$+ L_f\big|h(x^k(t), t) - h(x^{k-1}(t), t)\big|\big\}\, dt$$

$$\le \int_0^\tau \big\{\big|f_1^k - f_1^{k-1}\big| + \mu_\alpha\big|f_2^k - f_2^{k-1}\big| + \mu_h\big|f_3^k - f_3^{k-1}\big| + (L_f + L_f L_h)\big|x^k(t) - x^{k-1}(t)\big|\big\}\, dt. \tag{14}$$

Обозначив

$$L = \min\{1, \mu_\alpha, \mu_h, L_f(1 + L_h)\}, \tag{15}$$

заключаем, что если

$$D \le L \int_0^\tau \{|f^k - f^{k-1}| + |x^k - x^{k-1}|\}\, dt,$$

то неравенство (14) верно, и, положив $L < 1$, имеем, что оператор T сжимающий. Тем самым доказано выполнение принципа сжимающих отображений и, следовательно, существование и единственность решения обратной задачи для системы (1), т. е. верна следующая

Теорема 4. *Пусть в области W, описанной формулой* (6), *выполняются условия* 1–5 *из п.* 3*; имеют место ограничения* (11)*; $x, y \in C^1(\mathbb{R})$ в системе* (1)*. Если $t^0, \alpha^0 \in \mathbb{R}^3$ удовлетворяют условию*

$$\Delta^0 = \det \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1^0 & h(\alpha_1^0, t_1^0) \\ 1 & \alpha_2^0 & h(\alpha_2^0, t_2^0) \\ 1 & \alpha_3^0 & h(\alpha_3^0, t_3^0) \end{pmatrix} \ne 0,$$

то при любых $\beta^0 \in \mathbb{R}^3$ обратная задача для системы (1) $(\varepsilon \ne 0)$ *имеет единственное решение при $L < 1$, где константа L описана равенством* (15).

Автор выражает благодарность В. Н. Потапову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гутман А. Е., Кононенко Л. И.* Формализация обратных задач и ее приложения // Сиб. журн. чист. и прикл. математики. 2017. Т. 17, № 4. С. 49–56.

2. *Гутман А. Е., Кононенко Л. И.* Обратная задача химической кинетики как композиция бинарных соответствий // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 48–53.

3. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1963.

4. *Васильева А. В., Бутузов В. Ф.* Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.

5. *Гольдштейн В. М., Соболев В. А.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.

6. *Кононенко Л. И.* Качественный анализ сингулярно возмущенных систем с одной или двумя медленными и быстрыми переменными // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 4. С. 55–62.

7. *Тихонов А. Н.* О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. 1948. Т. 22, № 2. С. 193–204.

8. *Кононенко Л. И.* О гладкости медленных поверхностей сингулярно возмущенных систем // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 2. С. 109–125.

9. *Кононенко Л. И.* Медленные поверхности в задачах химической кинетики // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, вып. 2. С. 49–67.

10. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М: Наука, 1980.

11. *Романов В. Г.* Обратные задачи для гиперболических систем // Вычислительные методы в математической физике, геофизике и оптимальном управлении. Новосибирск: Наука, 1978. С. 128–142.

12. *Кабанихин С. И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.

13. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи. Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.

14. *Аниконов Ю. Е.* Несколько вопросов теории обратных задач для кинетических уравнений // Обратные задачи математической физики. Новосибирск, 1985. С. 28–41.

15. *Голубятников В. П.* Обратная задача для уравнения Гамильтона — Якоби на замкнутом многообразии // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 2. С. 276–279.

16. *Кононенко Л. И.* Задача идентификации для сингулярных систем с малым параметром в химической кинетике // Сиб. электрон. мат. изв. 2016. Т. 13. С. 175–180.

17. *Gutman A. E., Kononenko L. I.* Binary correspondences and the inverse problem of chemical kinetics // Владикавк. мат. журн. 2018. Т. 20, № 3. С. 37–47.

18. *Решетняк Ю. Г.* Курс математического анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 1999. Ч. 1, Кн. 2, 2000. Ч .2, Кн. 1.

Поступила в редакцию 28 февраля 2021 г.
После доработки 28 февраля 2021 г.
Принята к публикации 26 мая 2021 г.

Кононенко Лариса Ивановна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
`larak@math.nsc.ru`

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2021. Том 28, № 2

UDC 541.124+517.9

THE IDENTIFICATION PROBLEM FOR A NONSINGULAR SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH FAST AND SLOW VARIABLES

L. I. Kononenko

Abstract: An iteration algorithm of finding an approximate solution to an inverse problem in the nonsingular case ($\varepsilon \neq 0$) is proposed. On each iteration step, the algorithm combines the inverse problem solution for the investigated case $\varepsilon \neq 0$ and the direct problem solution which is reduced to the proof of existence and uniqueness theorem in case $\varepsilon \neq 0$. We prove a theorem about the convergence of the proposed algorithm; the proof is based on the contraction mapping principle.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.58.21.001

Keywords: inverse problem, ordinary differential equation, small parameter, contraction mapping principle, chemical kinetics.

REFERENCES

1. *Gutman A. E. and Kononenko L. I.*, “Formalization of inverse problems and its applications [in Russian],” Sib. Zh. Chist. Prikl. Mat., **17**, No. 4, 49–56 (2017).
2. *Gutman A. E. and Kononenko L. I.*, “The inverse problem of chemical kinetics as a composition of binary correspondences [in Russian],” Sib. Elektron. Mat. Izv., **15**, 48–53 (2018).
3. *Mitropolsky Yu. A. and Lykova O. B.*, Integral Manifolds in Nonlinear Mechanics [in Russian], Nauka, Moscow (1963).
4. *Vasil'eva A. V. and Butuzov V. F.*, Singularly Perturbed Equations in Critical Cases [in Russian], Mosk. Gos. Univ., Moscow (1978).
5. *Goldstein V. M. and Sobolev V. A.*, Qualitative Analysis of Singularly Perturbed Systems [in Russian], Inst. Mat., Novosibirsk (1988).
6. *Kononenko L. I.*, “Qualitative analysis of singularly perturbed systems with one or two slow and fast variables [in Russian],” Sib. Zh. Ind. Mat., **5**, No. 4, 55–62 (2002).
7. *Tikhonov A. N.*, “On independence of solutions to differential equations of a small parameter [in Russian],” Mat. Sb., **22**, No. 2, 193–204 (1948).
8. *Kononenko L. I.*, “On the smoothness of slow surfaces of singularly perturbed systems [in Russian],” Sib. Zh. Ind. Mat., **5**, No. 2, 109–125 (2002).
9. *Kononenko L. I.*, “Slow surfaces in problems of chemical kinetics [in Russian],” Mat. Zamet. YaGU, **19**, No. 2, 49–67 (2012).
10. *Lavrent'ev M. M., Romanov V. G., and Shishatskii S. P.*, Ill-Posed Problems of Mathematical Physics and Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).
11. *Romanov V. G.*, “Inverse problems for hyperbolic systems [in Russian],” in: Numerical Methods in Mathematical Physics, Geophysics and Optimal Control, pp. 75–83, Nauka, Novosibirsk (1978).
12. *Kabanikhin S. I.*, Inverse and Ill-Posed Problems [in Russian], Sib. Nauch. Izdat., Novosibirsk (2009).

13. *Kozhanov A. I.*, "Nonlinear loaded equations and inverse problems," Comput. Math. Math. Phys., **44**, No. 4, 657–675 (2004).
14. *Anikonov Yu. E.*, "Some questions in the theory of inverse problems for kinetic equations," in: Inverse Problems of Mathematical Physics [in Russian], pp. 28–41, Vychisl. Tsentr Sib. Otdel. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk (1985).
15. *Golubyatnikov V. P.*, "An inverse problem for the Hamilton–Jacobi equation on a closed manifold," Sib. Math. J., **38**, No. 2, 235–238 (1997).
16. *Kononenko L. I.*, "Identification problem for singular systems with small parameter in chemical kinetics [in Russian]," Sib. Elektron. Mat. Izv., **13**, 175–180 (2016).
17. *Gutman A. E. and Kononenko L. I.*, "Binary correspondences and the inverse problem of chemical kinetics," Vladikavk. Mat. Zh., **20**, No. 3, 37–47 (2018).
18. *Reshetnyak Yu. G.*, Course of Mathematical Analysis [in Russian], Izdat. Inst. Mat., Novosibirsk (1999, vol. 1; 2000, vol. 2).

Submitted February 28, 2021
Revised February 28, 2021
Accepted May 26, 2021

Larisa I. Kononenko
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia
larak@math.nsc.ru