Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

УДК 517.929.4

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И. И. Матвеева, А. В. Хмиль

Аннотация. Рассматривается класс нелинейных систем разностных уравнений с запаздыванием и постоянными коэффициентами в линейных членах. Указаны условия асимптотической устойчивости нулевого решения и получены оценки, характеризующие скорость стабилизации решений на бесконечности. При получении результатов используется функционал Ляпунова — Красовского специального вида.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.56.29.003

Ключевые слова: разностные уравнения с запаздыванием, асимптотическая устойчивость, функционал Ляпунова — Красовского, оценки решений.

Введение

В работе рассматриваются нелинейные системы разностных уравнений с постоянными коэффициентами следующего вида:

$$x_{n+1} = Ax_n + Bx_{n-\tau(n)} + F(n, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{0.1}$$

где A, B — постоянные матрицы размеров $m \times m$, $\tau(n) \in \{1, \dots, \tau\}$ — параметр запаздывания, $1 \le \tau(n) \le \tau < \infty$, $F(n, u)$ — непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая оценке

$$\|F(n, u)\| \le q\|u\|^{1+\omega}, \quad n = 0, 1, \dots, \ q > 0, \ \omega \ge 0. \tag{0.2}$$

Цель работы — изучение асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (0.1) и получение оценок решений $\{x_n\}$, характеризующих скорость стабилизации при $n \to \infty$.

Первые результаты по устойчивости решений обыкновенных разностных уравнений были получены более ста лет назад в работах А. Пуанкаре и О. Перрона. Однако систематическое изучение устойчивости для разностных уравнений началось в 50-х гг. прошлого столетия (см., например, [1–3]). Это было обусловлено развитием численных методов и математического моделирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 19–01–00754).

В настоящее время имеется ряд монографий по разностным уравнениям, в которых изложены различные результаты по теории устойчивости и методы, которыми они получены (см., например, [4–6]).

В последнюю четверть века начали проводиться активные исследования по теории устойчивости решений разностных уравнений с запаздывающим аргументом (см., например, [7–15]). При исследованиях устойчивости использовались аналоги методов, используемых в теории функционально-дифференциальных уравнений (спектральные методы, метод неравенств типа Халаная, метод функций Ляпунова, построение решения в операторном виде и установление связей между дифференциальными уравнениями и разностными уравнениями с запаздывающим аргументом и т. д.).

В работе при изучении асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (0.1) будем использовать функционал Ляпунова — Красовского

$$v(n,x) = \langle Hx_n, x_n\rangle + \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle, \tag{0.3}$$

где H, $K_0, K_1, \dots, K_{\tau-1}$ — некоторые эрмитовы положительно определенные матрицы. Этот функционал был предложен в работе [16] и является дискретным аналогом функционала Ляпунова — Красовского

$$\langle Hy(t), y(t)\rangle + \int_{t-\tau}^{t} \langle K(t-s)y(s), y(s)\rangle\, ds,$$

введенного в [17] при исследовании асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + By(t-\tau) + F(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > 0.$$

Используя функционал (0.3), установим достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения систем вида (0.1), получим оценки на множество притяжения и на скорость стабилизации решений на бесконечности.

Авторы выражают благодарность профессору Г. В. Демиденко за полезные обсуждения.

§ 1. Предварительные сведения

Рассмотрим линейную систему разностных уравнений с постоянными коэффициентами и запаздыванием

$$x_{n+1} = Ax_n + Bx_{n-\tau(n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \tag{1.1}$$

где A, B — постоянные матрицы размеров $m\times m$, $\tau(n) \in \mathbb{N}$. Будем предполагать, что запаздывание ограничено:

$$1 \le \tau(n) \le \tau < \infty.$$

Тогда, очевидно, систему уравнений (1.1) можно записать в виде следующей системы линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами:

$$x_{n+1} = Ax_n + \sum_{j=1}^{\tau} B_j(n)x_{n-j}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1.2}$$

где

$$B_j(n) = \begin{cases} B & \text{при } j = \tau(n), \\ 0 & \text{при } j \neq \tau(n). \end{cases}$$

При изучении устойчивости решений линейных систем разностных уравнений с постоянными коэффициентами можно использовать спектральный критерий или критерий Ляпунова (см., например, [18, 19]). Однако для системы (1.2) эти критерии неприменимы, поскольку матрицы $B_j(n)$ не являются постоянными. При изучении асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.2) в работе [16] использовался функционал Ляпунова — Красовского (0.3). Были установлены достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.2), а следовательно, и (1.1), при этом также получены оценки скорости убывания нормы решения $\{x_n\}$ системы (1.1) с заданными начальными условиями

$$x_0,\ x_{-1}, \ldots, x_{-\tau} \tag{1.3}$$

при $n \to \infty$. Приведем соответствующие результаты из работы [16].

Теорема 1.1 [16]. *Предположим, что существуют эрмитовы положительно определенные матрицы H, K_j, $j = 0, 1, \ldots, \tau$, такие, что*

$$\Delta_j = K_{j-1} - K_j > 0, \quad j = 1, \ldots, \tau,$$

и составные матрицы

$$C(n) = -\begin{pmatrix} C_{00}(n) & A^*HB_1(n) & \ldots & A^*HB_\tau(n) \\ B_1^*(n)HA & C_{11}(n) & \ldots & B_1^*(n)HB_\tau(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_\tau^*(n)HA & B_\tau^*(n)HB_1(n) & \ldots & C_{\tau\tau}(n) \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

с элементами

$$C_{00}(n) = A^*HA - H + K_0,$$
$$C_{jj}(n) = B_j^*(n)HB_j(n) - \frac{1}{2}\Delta_j, \quad j = 1, \ldots, \tau - 1,$$
$$C_{\tau\tau}(n) = B_\tau^*(n)HB_\tau(n) - K_\tau$$

положительно определены. Тогда нулевое решение системы (1.1) *асимптотически устойчиво.*

Из определения матриц $B_j(n)$ вытекает, что из всего множества положительно определенных матриц $\{C(n)\}$, $n \in \mathbb{N}$, различных матриц не более чем τ. Следовательно, существует константа $c_1 > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка

$$\left\langle C(n)\begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-\tau} \end{pmatrix} \right\rangle \geq c_1 \sum_{i=0}^{\tau} \|x_{n-i}\|^2. \tag{1.5}$$

Теорема 1.2 [16]. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1.1. *Пусть* $\varkappa_j \in (0,1)$, $j = 1, 2, \dots, \tau$, *такие, что*

$$-\frac{1}{2}\Delta_i + \varkappa_i K_{i-1} \le 0, \quad i = 1, \dots, \tau - 1, \quad -\Delta_\tau + \varkappa_\tau K_{\tau-1} \le 0. \tag{1.6}$$

Тогда для решения начальной задачи (1.1), (1.3) *справедлива оценка*

$$\|x_n\|^2 \le \frac{(1-\varepsilon)^n}{h_1} v(0, x),$$

где $h_1 > 0$ — *минимальное собственное значение матрицы* H,

$$v(0, x) = \langle H x_0, x_0 \rangle + \sum_{j=-\tau}^{-1} \langle K_{-j-1} x_j, x_j \rangle, \tag{1.7}$$

$$\varepsilon = \min\left\{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\tau, \frac{c_1}{\|H\|}\right\}, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{1.8}$$

Используя функционал (0.3), проведем исследования асимптотической устойчивости решений нелинейных систем вида (0.1). В следующем параграфе сформулируем и докажем основные результаты работы.

§ 2. Основные результаты

Установим достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (0.1), получим оценки на множество притяжения нулевого решения и оценки, характеризующие скорость стабилизации решений задачи (0.1), (1.3) на бесконечности.

Поскольку запаздывание ограничено, систему (0.1) можно записать в виде

$$x_{n+1} = A x_n + \sum_{j=1}^{\tau} B_j(n) x_{n-j} + F(n, x_n), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{2.1}$$

где

$$B_j(n) = \begin{cases} B & \text{при } j = \tau(n), \\ 0 & \text{при } j \ne \tau(n). \end{cases}$$

Будем предполагать, что выполнены условия теоремы 1.1. Вначале рассмотрим случай $\omega > 0$. Введем следующие обозначения:

$$\rho = \frac{\|H\|\|B\|^2}{c_1} + 1, \quad r = \left(\sqrt{\frac{\varepsilon h_1^{1+\omega}}{q^2 \|H\| \rho} + \left(\frac{\|A\| h_1^{\omega/2}}{q\rho}\right)^2} - \frac{\|A\| h_1^{\omega/2}}{q\rho}\right)^{2/\omega},$$

$h_1 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H, c_1, ε определены в (1.5), (1.8) соответственно.

Теорема 2.1. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1.1. *Тогда нулевое решение системы* (0.1) *асимптотически устойчиво и множество*

$$\mathscr{E} = \{x_0, \dots, x_{-\tau} \in \mathbb{C}^m : v(0, x) < r\} \tag{2.2}$$

является множеством притяжения нулевого решения, где $v(0,x)$ *определено в* (1.7). *При этом для решения задачи* (0.1), (1.3) *с начальными условиями из* $\mathscr{E}$ *имеет место оценка*

$$\|x_n\|^2 \leq (h_1)^{-1}\biggl(1-\varepsilon+2q\|H\|\|A\|h_1^{-1-\omega/2}v^{\omega/2}(0,x) + \left(\frac{q^2\|H\|^2\|B\|^2}{c_1}+q^2\|H\|\right)h_1^{-1-\omega}v^{\omega}(0,x)\biggr)^n v(0,x). \quad (2.3)$$

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — решение начальной задачи (0.1), (1.3). Рассмотрим на этом решении функционал (0.3). В силу условий на H и $\{K_j\}$ при $\{x_n\}\neq 0$ функционал $v(n,x)>0$.

Рассмотрим разность $v(n+1,x)-v(n,x)$. Используя обозначения для матриц Δ_j, имеем

$$v(n+1,x)-v(n,x) = \langle Hx_{n+1},x_{n+1}\rangle - \langle Hx_n,x_n\rangle + \sum_{j=n+1-\tau}^{n}\langle K_{n-j}x_j,x_j\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1}\langle K_{n-j-1}x_j,x_j\rangle$$

$$= \langle Hx_{n+1},x_{n+1}\rangle - \langle Hx_n,x_n\rangle + \langle K_0x_n,x_n\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1}\langle \Delta_{n-j}x_j,x_j\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle.$$

Учитывая, что $\{x_n\}$ — решение эквивалентной задачи (2.1), (1.3), получаем

$$v(n+1,x)-v(n,x) = \langle A^*HAx_n,x_n\rangle - \langle Hx_n,x_n\rangle + \langle K_0x_n,x_n\rangle + \sum_{j=1}^{\tau}\langle A^*HB_j(n)x_{n-j},x_n\rangle + \sum_{j=1}^{\tau}\langle B_j^*(n)HAx_n,x_{n-j}\rangle$$

$$+ \sum_{j,i=1}^{\tau}\langle B_j^*(n)HB_i(n)x_{n-i},x_{n-j}\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1}\langle \Delta_{n-j}x_j,x_j\rangle - \langle K_\tau x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle$$

$$+2\,\mathrm{Re}\langle Ax_n,HF(n,x_n)\rangle + 2\sum_{j=1}^{\tau}\mathrm{Re}\langle B_j(n)x_{n-j},HF(n,x_n)\rangle + \langle F(n,x_n),HF(n,x_n)\rangle.$$

Используя матрицу $C(n)$, заданную в (1.4), разность $v(n+1,x)-v(n,x)$ можно переписать в виде

$$v(n+1,x)-v(n,x) = -\left\langle C(n)\begin{pmatrix} x_n\\ \vdots\\ x_{n-\tau}\end{pmatrix},\begin{pmatrix} x_n\\ \vdots\\ x_{n-\tau}\end{pmatrix}\right\rangle - \frac{1}{2}\sum_{j=n-\tau+1}^{n-1}\langle \Delta_{n-j}x_j,x_j\rangle - \langle \Delta_\tau x_{n-\tau},x_{n-\tau}\rangle + W(n,x), \quad (2.4)$$

где

$$W(n,x) = 2\,\mathrm{Re}\langle Ax_n,HF(n,x_n)\rangle + 2\sum_{j=1}^{\tau}\mathrm{Re}\langle B_j(n)x_{n-j},HF(n,x_n)\rangle + \langle F(n,x_n),HF(n,x_n)\rangle. \quad (2.5)$$

Оценим каждое из слагаемых в (2.4). По условию теоремы все матрицы $C(n)$ являются положительно определенными, при этом выполнена оценка (1.5). Поскольку $H = H^* > 0$, то

$$c_1 \sum_{i=0}^{\tau} \|x_{n-i}\|^2 \geq \frac{c_1}{\|H\|} \langle Hx_n, x_n \rangle + c_1 \sum_{i=1}^{\tau} \|x_{n-i}\|^2. \tag{2.6}$$

Из условий (1.6) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \langle \Delta_{n-j} x_j, x_j \rangle + \langle \Delta_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle \\ \geq \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \varkappa_{n-j} \langle K_{n-j-1} x_j, x_j \rangle + \varkappa_\tau \langle K_{\tau-1} x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

В силу (0.2) имеем

$$\begin{aligned} \|W(n,x)\| \leq 2q\|H\|\|A\|\|x_n\|^{2+\omega} \\ + \left[2q\|H\|\|x_n\|^{1+\omega} \sum_{j=1}^{\tau} \|B_j(n)\|\|x_{n-j}\| + q^2\|H\|\|x_n\|^{2+2\omega} \right]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Для проведения дальнейших рассуждений воспользуемся вспомогательной леммой.

Лемма. *Рассмотрим квадратичную форму*

$$u_0 \left(\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_\tau u_\tau \right),$$

где $\alpha_i > 0$, $i = 0, \ldots, \tau$. *Для любых* $\beta_i > 0$, $i = 1, \ldots, \tau$, *имеет место неравенство*

$$u_0 \left(\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_\tau u_\tau \right) \leq \beta_0 u_0^2 + \beta_1 u_1^2 \cdots + \beta_\tau u_\tau^2, \tag{2.9}$$

где

$$\beta_0 \geq \alpha_0 + \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1} + \cdots + \frac{\alpha_\tau^2}{4\beta_\tau}.$$

Доказательство. Рассмотрим разность выражений, стоящих в правой и левой частях неравенства (2.9):

$$J = (\beta_0 - \alpha_0) u_0^2 + \beta_1 u_1^2 + \cdots + \beta_\tau u_\tau^2 - \alpha_1 u_0 u_1 - \cdots - \alpha_\tau u_0 u_\tau.$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} J = \beta_1 \left(u_1^2 - \frac{\alpha_1}{\beta_1} u_0 u_1 + \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1^2} u_0^2 \right) - \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1} u_0^2 + \ldots \\ + \beta_\tau \left(u_\tau^2 - \frac{\alpha_\tau}{\beta_\tau} u_0 u_\tau + \frac{\alpha_\tau^2}{4\beta_\tau^2} u_0^2 \right) - \frac{\alpha_\tau^2}{4\beta_\tau} u_0^2 + (\beta_0 - \alpha_0) u_0^2 \\ = (\beta_0 - \alpha_0 - \frac{\alpha_1^2}{4\beta_1} - \cdots - \frac{\alpha_\tau^2}{4\beta_\tau}) u_0^2 + \beta_1 \left(u_1 - \frac{\alpha_1}{2\beta_1} u_0 \right)^2 + \cdots + \beta_\tau \left(u_\tau - \frac{\alpha_\tau}{2\beta_\tau} u_0 \right)^2. \end{aligned}$$

В силу условий на β_i получаем, что $J \geq 0$. Отсюда вытекает оценка (2.9).

Лемма доказана.

Введем следующие обозначения:

$$u_0 = \|x_n\|^{1+\omega}, \quad u_i = \|x_{n-i}\|, \quad i = 1, \ldots, \tau,$$
$$\alpha_0 = q^2\|H\|, \quad \alpha_i = 2q\|H\|\|B_i(n)\|, \quad i = 1, \ldots, \tau.$$

Применим лемму к выражению, стоящему в квадратных скобках в (2.8), выбирая

$$\beta_i = c_1,\, i = 1, \ldots, \tau, \quad \beta_0 = \alpha_0 + \frac{1}{4c_1}\sum_{i=1}^{\tau}\alpha_i^2.$$

Тогда

$$2q\|H\|\|x_n\|^{1+\omega}\sum_{j=1}^{\tau}\|B_j(n)\|\|x_{n-j}\| + q^2\|H\|\|x_n\|^{2+2\omega}$$
$$\leq q^2\|H\|\left(\frac{\|H\|\|B\|^2}{c_1} + 1\right)\|x_n\|^{2+2\omega} + c_1\sum_{j=1}^{\tau}\|x_{n-j}\|^2.$$

Следовательно,

$$\|W(n,x)\| \leq 2q\|H\|\|A\|\|x_n\|^{2+\omega}$$
$$+ q^2\|H\|\left(\frac{\|H\|\|B\|^2}{c_1} + 1\right)\|x_n\|^{2+2\omega} + c_1\sum_{j=1}^{\tau}\|x_{n-j}\|^2.$$

В силу положительной определенности матриц H, K_j справедливы неравенства

$$v(n,x) \geq \langle Hx_n, x_n\rangle \geq h_1\|x_n\|^2,$$

где $h_1 > 0$ — минимальное собственное значение матрицы H. Тогда

$$\|x_n\| \leq h_1^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}(n,x). \tag{2.10}$$

Следовательно,

$$\|W(n,x)\| \leq 2q\|H\|\|A\|h_1^{-1-\alpha}v^{1+\alpha}(n,x)$$
$$+\ q^2\|H\|\left(\frac{\|H\|\|B\|^2}{c_1} + 1\right)h_1^{-1-2\alpha}v^{1+2\alpha}(n,x) + c_1\sum_{j=1}^{\tau}\|x_{n-j}\|^2, \tag{2.11}$$

где $\alpha = \omega/2$.

Учитывая оценки (2.6), (2.7), (2.11), из (2.4) получаем

$$0 \leq v(n+1,x) \leq v(n,x) - \frac{c_1}{\|H\|}\langle Hx_n, x_n\rangle$$
$$- \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1}\varkappa_{n-j}\langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle - \varkappa_\tau\langle K_{\tau-1}x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle$$
$$+ 2q\|H\|\|A\|h_1^{-1-\alpha}v^{1+\alpha}(n,x) + q^2\|H\|\left(\frac{\|H\|\|B\|^2}{c_1} + 1\right)h_1^{-1-2\alpha}v^{1+2\alpha}(n,x).$$

Используя ε, заданное в (1.8), и определение функционала (0.3), имеем

$$v(n+1,x) \le \biggl(1-\varepsilon+2q\|H\|\|A\|h_1^{-1-\alpha}v^{\alpha}(n,x) \\ + q^2\|H\|\left(\frac{\|H\|\|B\|^2}{c_1}+1\right)h_1^{-1-2\alpha}v^{2\alpha}(n,x)\biggr)v(n,x).$$

Рассмотрим данное неравенство при $n=0,1,\dots$. Пусть $n=0$. Тогда

$$v(1,x) \le \biggl(1-\varepsilon+2q\|H\|\|A\|h_1^{-1-\alpha}v^{\alpha}(0,x) \\ + q^2\|H\|\left(\frac{\|H\|\|B\|^2}{c_1}+1\right)h_1^{-1-2\alpha}v^{2\alpha}(0,x)\biggr)v(0,x),$$

Пусть

$$\Delta = 1-\varepsilon+2q\|H\|\|A\|h_1^{-1-\alpha}v^{\alpha}(0,x)+q^2\|H\|\left(\frac{\|H\|\|B\|^2}{c_1}+1\right)h_1^{-1-2\alpha}v^{2\alpha}(0,x). \tag{2.12}$$

Нетрудно проверить, что $0<\Delta<1$, если начальные данные (1.3) удовлетворяют условию (2.2).

Пусть $n=1$. Тогда

$$v(2,x) \le \biggl(1-\varepsilon+2q\|H\|\|A\|h_1^{-1-\alpha}v^{\alpha}(1,x) \\ + \left(\frac{q^2\|H\|^2\|B\|^2}{c_1}+q^2\|H\|\right)h_1^{-1-2\alpha}v^{2\alpha}(1,x)\biggr)v(1,x) \\ \le \Delta\biggl(1-\varepsilon+2q\|H\|\|A\|h_1^{-1-\alpha}\Delta^{\alpha}v^{\alpha}(0,x) \\ + \left(\frac{q^2\|H\|^2\|B\|^2}{c_1}+q^2\|H\|\right)h_1^{-1-2\alpha}\Delta^{2\alpha}v^{2\alpha}(0,x)\biggr)v(0,x).$$

Поскольку $\Delta<1$, то

$$v(2,x) \le \Delta^2 v(0,x).$$

Повторяя аналогичные рассуждения, получаем неравенство

$$v(n,x) \le \Delta^n v(0,x). \tag{2.13}$$

В силу (2.10) из (2.13) имеем оценку

$$\|x_n\|^2 \le (h_1)^{-1}\Delta^n v(0,x),$$

где Δ определено в (2.12). Поскольку $0<\Delta<1$, нулевое решение системы (0.1) асимптотически устойчиво и для решения задачи (0.1), (1.3) с начальными данными из $\mathscr{E}$ справедлива оценка (2.3).

Теорема доказана.

Рассмотрим теперь систему (0.1) при $\omega=0$, т. е. вектор-функция $F(n,u)$ удовлетворяет оценке

$$\|F(n,u)\| \le q\|u\|, \quad n=0,1,\dots, \quad q>0. \tag{2.14}$$

Теорема 2.2. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 1.1. *Если*

$$q < \sqrt{\frac{c_1}{\|H\|} + (\|A\| + \|B\|)^2} - (\|A\| + \|B\|), \tag{2.15}$$

то нулевое решение системы (0.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы 2.1, рассмотрим на решении начальной задачи (0.1), (1.3) функционал (0.3). Используя матрицу $C(n)$, разность $v(n+1,x) - v(n,x)$ можно записать в виде (2.4), где $W(n,x)$ определено в (2.5). В силу (2.14) имеем

$$\|W(n,x)\| \le 2q\|H\|\|A\|\|x_n\|^2 + 2q\|H\|\|x_n\| \sum_{j=1}^{\tau} \|B_j(n)\|\|x_{n-j}\| + q^2\|H\|\|x_n\|^2. \tag{2.16}$$

Введем следующие обозначения:

$$u_0 = \|x_n\|, \quad u_i = \|x_{n-i}\|, \quad i = 1, \dots, \tau,$$

$$\alpha_0 = q^2\|H\| + 2q\|H\|\|A\|, \quad \alpha_i = 2q\|H\|\|B_i(n)\|, \; i = 1, \dots, \tau.$$

Применим лемму к левой части неравенства (2.16), взяв

$$\beta_0 = \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_\tau, \quad \beta_i = \frac{\alpha_i}{4}, \quad i = 1, \dots, \tau.$$

Тогда

$$\|W(n,x)\| \le q\|H\| \left(2\|A\| + q + 2\sum_{j=1}^{\tau} \|B_j(n)\| \right) \|x_n\|^2 + \frac{q}{2}\|H\| \sum_{j=1}^{\tau} \|B_j(n)\|\|x_{n-j}\|^2.$$

По условию теоремы все матрицы $C(n)$ являются положительно определенными, при этом справедливо неравенство (1.5). Учитывая приведенные выше оценки, получаем

$$\begin{aligned} 0 \le v(n+1,x) \le v(n,x) &- \sum_{j=1}^{\tau} \left(c_1 - \frac{q}{2}\|H\|\|B_j(n)\| \right) \|x_{n-j}\|^2 \\ &- \left(c_1 - q\|H\| \left(2\|A\| + q + 2\sum_{j=1}^{\tau} \|B_j(n)\| \right) \right) \|x_n\|^2 \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \langle \Delta_{n-j} x_j, x_j \rangle - \langle \Delta_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau} \rangle. \end{aligned} \tag{2.17}$$

В силу положительной определенности матриц $\{\Delta_j\}$ и равенства $\sum_{j=1}^{\tau} \|B_j(n)\| = \|B\|$ имеем

$$\begin{aligned} &v(n+1,x) - v(n,x) \\ &\le -\sum_{j=1}^{\tau} \left(c_1 - \frac{q}{2}\|H\|\|B_j(n)\| \right) \|x_{n-j}\|^2 - (c_1 - q\|H\|(2\|A\| + q + 2\|B\|))\|x_n\|^2. \end{aligned}$$

Если q удовлетворяет неравенству (2.15), то

$$c_1 - q\|H\|(2\|A\| + q + 2\|B\|) > 0.$$

Следовательно, $v(n+1,x) - v(n,x) < 0$. Тогда последовательность $\{v(n,x)\}$ является монотонно убывающей и ограниченной снизу. Поэтому по теореме Вейерштрасса она имеет предел. В силу единственности предела

$$0 \le (c_1 - q\|H\|(2\|A\| + q + 2\|B\|))\|x_n\|^2 \le v(n,x) - v(n+1,x) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Отсюда вытекает асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (0.1).

Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.2. *Тогда для решения начальной задачи* (0.1), (1.3) *имеет место оценка*

$$\|x_n\|^2 \le (h_1)^{-1}(1-\widetilde{\varepsilon})^n v(0,x),$$

где $h_1 > 0$ — *минимальное собственное значение матрицы* H, $v(0,x)$ *определено в* (1.7),

$$\widetilde{\varepsilon} = \min\left\{\varkappa_1, \dots, \varkappa_\tau, \frac{c_1}{\|H\|} - (2q(\|A\| + \|B\|) + q^2)\right\}, \quad 0 < \widetilde{\varepsilon} < 1.$$

Доказательство. Из условий теоремы вытекает неравенство

$$\frac{1}{2}\sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \langle \Delta_{n-j} x_j, x_j\rangle + \langle \Delta_\tau x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle \ge \sum_{j=n-\tau+1}^{n-1} \varkappa_{n-j}\langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle + \varkappa_\tau \langle K_{\tau-1}x_{n-\tau}, x_{n-\tau}\rangle.$$

Следовательно, из (2.17) получаем

$$0 \le v(n+1,x) \le v(n,x) - \sum_{j=1}^{\tau}\left(c_1 - \frac{q}{2}\|H\|\|B_j(n)\|\right)\|x_{n-j}\|^2 - (c_1 - q\|H\|(2\|A\| + q + 2\|B\|))\|x_n\|^2 - \sum_{j=n-\tau}^{n-1}\varkappa_{n-j}\langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle. \quad (2.18)$$

Так как $H = H^* > 0$, то

$$h_1\|x_n\|^2 \le \langle Hx_n, x_n\rangle \le \|H\|\|x_n\|^2. \quad (2.19)$$

Из (2.18) и (2.19) следует

$$0 \le v(n+1,x) \le v(n,x) - \left(\frac{c_1}{\|H\|} - q(2\|A\| + q + 2\|B\|)\right)\langle Hx_n, x_n\rangle - \sum_{j=n-\tau}^{n-1}\varkappa_{n-j}\langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle.$$

Учитывая условие на q и определение $\widetilde{\varepsilon}$, имеем

$$v(n+1,x) \leq v(n,x) - \widetilde{\varepsilon}\left(\langle Hx_n, x_n\rangle + \sum_{j=n-\tau}^{n-1} \langle K_{n-j-1}x_j, x_j\rangle\right) = (1-\widetilde{\varepsilon})v(n,x).$$

Следовательно,

$$v(n,x) \leq (1-\widetilde{\varepsilon})^n v(0,x).$$

Тогда

$$\|x_n\|^2 \leq (h_1)^{-1}(1-\widetilde{\varepsilon})^n v(0,x).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коваль П. И.* Приводимые системы разностных уравнений и устойчивость их решений // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 6. С. 143–146.
2. *Hahn W.* Über die Adwendung der Methode von Ljapunov auf Differenzengleichungen // Math. Ann. 1958. Bd. 136, Heft 1. S. 430–441.
3. *Jury E. I.* A simplified stability criterion for linear discrete systems // ERL Rep. Ser. 1961. N 60. P. 373.
4. *Hahn W.* Theorie und Adwendung der direkten Methode von Ljapunov. Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1959.
5. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М.: Мир, 1971.
6. *Elaydi S. N.* An introduction to difference equations. New York: Springer-Verl., 1999.
7. *Györi I., Pituk M.* Asymptotic formulae for the solutions of a linear delay difference equation // J. Math. Anal. Appl. 1995. V. 195, N 2. P. 376–392.
8. *Erbe L. H., Xia H., Yu J. S.* Global stability of a linear nonautonomous delay difference equation // J. Differ. Equ. Appl. 1995. V. 1, N 2. P. 151–161.
9. *Yu J. S.* Asymptotic stability of a linear difference equation with variable delay // Comput. Math. Appl. 1998. V. 36. N 10–12. P. 203–210.
10. *Agarwal R. P., Kim Y. H., Sen S. K.* Advanced discrete Halanay-type inequalities: stability of difference equations // J. Inequal. Appl. 2009. Article ID 535849.
11. *Berezansky L., Braverman E.* Exponential stability of difference equations with several delays: recursive approach // Adv. Differ. Equ. 2009. Article ID 104310.
12. *Хусаинов Д. Я., Шатырко А. В.* Исследование абсолютной устойчивости разностных системы с запаздыванием вторым методом Ляпунова // Журн. вычисл. и прикл. математики. 2010. № 4. С. 118–126.
13. *Куликов А. Ю.* Устойчивость линейного неавтономного разностного уравнения с ограниченными запаздываниями // Изв. вузов. Математика. 2010. № 11. С. 22–30.
14. *Куликов А. Ю., Малыгина В. В.* Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения // Изв. вузов. Математика. 2011. № 12. С. 30–41.
15. *Park J. H., Lee T. H., Liu Y., Chen J.* Dynamic systems with time delays: stability and control. Singapore: Springer, 2019.
16. *Демиденко Г. В., Балданов Д. Ш.* Об асимптотической устойчивости решений разностных уравнений с запаздыванием // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2015. Т. 15, № 4. С. 50–62.
17. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.
18. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970.

19. *Демиденко Г. В.* Матричные уравнения. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2009.

Поступила в редакцию 20 апреля 2021 г.г.
После доработки 20 апреля 2021 г.г.
Принята к публикации 26 августа 2021 г.г.

Матвеева Инесса Изотовна, Хмиль Арсений Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
matveeva@math.nsc.ru, khmilarseniy@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

UDC 517.929.4

STABILITY OF SOLUTIONS TO ONE CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS OF DELAY DIFFERENCE EQUATIONS

I. I. Matveeva and A. V. Khmil

Abstract: We consider a class of nonlinear systems of delay difference equations with constant coefficients in linear terms. Conditions for the asymptotic stability of the zero solution are established and estimates characterizing stabilization rate of solutions at infinity are obtained by using a special Lyapunov–Krasovskii functional.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.56.29.003

Keywords: delay difference equations, asymptotic stability, Lyapunov–Krasovskii functional, estimates for solutions.

REFERENCES

1. *Koval' P. I.*, "Reducible systems of difference equations and stability of their solutions [in Russian]," Uspekhi Mat. Nauk, **12**, No. 6, 143–146 (1957).
2. *Hahn W.*, "Über die Anwendung der Methode von Ljapunov auf Differenzengleichungen," Math. Ann., **136**, No. 1, 430–441 (1958).
3. *Jury E. I.*, "A simplified stability criterion for linear discrete systems," ERL Rep. Ser., No. 60, 373 (1961).
4. *Hahn W.*, Theorie und Anwendung der Direkten Methode von Ljapunov, Springer-Verl., Berlin; Gottingen; Heidelberg (1959).
5. *Halanay A. and Wexler D.*, Qualitative Theory of Impulse Systems, Romanian Acad. Press, Bucharest (1968).
6. *Elaydi S. N.*, An Introduction to Difference Equations, Springer-Verl., New York (1999).
7. *Györi I. and Pituk M.*, "Asymptotic formulae for the solutions of a linear delay difference equation," J. Math. Anal. Appl., **195**, No. 2, 376–392 (1995).
8. *Erbe L. H., Xia H., and Yu J. S.*, "Global stability of a linear nonautonomous delay difference equation," J. Differ. Equ. Appl., **1**, No. 2, 151–161 (1995).
9. *Yu J. S.*, "Asymptotic stability of a linear difference equation with variable delay," Comput. Math. Appl., **36**, No. 10–12, 203–210 (1998).
10. *Agarwal R. P., Kim Y. H., and Sen S. K.*, "Advanced discrete Halanay-type inequalities: stability of difference equations," J. Inequal. Appl., article ID 535849 (2009).
11. *Berezansky L. and Braverman E.*, "Exponential stability of difference equations with several delays: recursive approach," Adv. Differ. Equ., article ID 104310 (2009).
12. *Khusainov D. Ya. and Shatyrko A. V.*, "Research of absolute stability of difference systems with delay via the second method of Lyapunov [in Russian]," Zhurn. Vychisl. Prikl. Mat., No 4, 118–126 (2010).
13. *Kulikov A. Yu.*, "Stability of a linear nonautonomous difference equation with bounded delays," Russ. Math., **54**, No. 11, 18–26 (2010).
14. *Kulikov A. Yu. and Malygina V. V.*, "Stability of a linear difference equation and estimation of its fundamental solution," Russ. Math., **55**, No. 12, 23–33 (2011).

15. *Park J. H., Lee T. H., Liu Y., and Chen J.*, Dynamic Systems with Time Delays: Stability and Control, Springer-Verl., Singapore (2019).
16. *Demidenko G. V. and Baldanov D. Sh.*, "On asymptotic stability of solutions to delay difference equations," J. Math. Sci., **221**, No. 6, 815–825 (2017).
17. *Demidenko G. V. and Matveeva I. I.*, "Asymptotic properties of solutions to delay differential equations [in Russian]," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform., **5**, No. 3, 20–28 (2005).
18. *Daleckii Ju. L. and Krein M. G.*, Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1974).
19. *Demidenko G. V.*, Matrix Equations [in Russian], Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (2009).

Submitted April 20, 2021
Revised April 20, 2021
Accepted August 26, 2021

Inessa I. Matveeva, Arseniy V. Khmil
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia
matveeva@math.nsc.ru, khmilarseniy@mail.ru