Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

УДК 517.9

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ОБОБЩЕННЫМ ЯДРОМ КОШИ НА КУСОЧНО–ГЛАДКОМ КОНТУРЕ

А. П. Солдатов

Аннотация. Рассматриваются сингулярные интегральные операторы двух типов на кусочно-гладком контуре в весовых лебеговых пространствах с обобщенными ядрами Коши, связанными с параметриксом эллиптических систем первого порядка на плоскости. Операторы первого типа линейны над полем комплексных чисел и представляют собой обычную комбинацию обобщенного сингулярного оператора Коши и операторов умножения на кусочно-непрерывные матрицы-функции. Операторы второго типа действуют в пространстве вещественных вектор-функций и тем самым линейны над полем $\mathbb{R}$. Они возникают при прямой редукции эллиптических краевых задач с помощью интегральных представлений. Получен критерий фредгольмовости этих операторов, и указана формула их индекса.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.52.22.005

Ключевые слова: сингулярные интегральные операторы, эллиптические системы первого порядка, обобщенные ядра Коши, кусочно-гладкий контур, формула индекса.

Посвящается Ивану Егоровичу Егорову
в связи с его 70-летием

1. Введение. Рассмотрим на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ кусочно-гладкий контур Γ, связные компоненты которого определенным образом ориентированы. Пусть конечное множество $F \subseteq \Gamma$ содержит все угловые точки этого контура. Тогда кривая $\Gamma \setminus F$ гладкая и каждая ее связная компонента гомеоморфна либо открытому интервалу прямой, либо окружности. Пусть m — число компонент первого типа и n — общее число компонент. Таким образом, Γ есть объединение гладких дуг $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ (сомкнутых или разомкнутых), которые без своих концов являются компонентами первого типа, и простых гладких контуров $\Gamma_{m+1}, \dots, \Gamma_n$. При этом дуги могут попарно пересекаться только по своим концам, а контуры попарно не пересекаются между собой и с дугами. Кроме того, m совпадает с числом точек множества F. Например, окружность Γ с выделенной точкой τ представляет собой сомкнутую дугу $\Gamma = \Gamma_1$ с общим концом τ, так что $n = m = 1$. В случае $F = \varnothing$, когда $m = 0$, кривая Γ является гладким контуром, составным при $n > 1$.

Обозначим через $C(\Gamma, F)$ класс кусочно-непрерывных функций на Γ, точнее, непрерывных на $\Gamma \setminus F$ функций $a(t)$, допускающих в точках $\tau \in F$ односторонние пределы $a(\tau \pm 0)$. В частности, функция a непрерывна на каждой гладкой разомкнутой дуге $G \subseteq \Gamma$, не содержащей внутри точек множества F. Если на этих дугах a удовлетворяет условию Гёльдера, т. е. принадлежит $C^\mu(G)$ с некоторым с показателем $0 < \mu < 1$, то функцию a называем *кусочно-гёльдеровой*. По отношению к μ класс этих функций обозначаем через $C^\mu(\Gamma, F)$. По определению контур Γ *кусочно-ляпуновский*, если каждая гладкая разомкнутая дуга $G \subseteq \Gamma$, не содержащая внутри точек множества F, является ляпуновской.

Условимся под *весовым порядком* понимать семейство $\lambda = (\lambda_\tau, \tau \in F)$ вещественных чисел. Соответственно функцию вида

$$\rho_\lambda(z) = \prod_{\tau \in F} |z - \tau|^{\lambda_\tau} \tag{1.1}$$

называем *весовой функцией порядка* λ. Весовые порядки, которые на всех точках $\tau \in F$ принимают одно и то же значение, отождествляются с вещественными числами.

По определению весовое пространство $L^p_0(\Gamma, F)$, $1 < p < \infty$, состоит из измеримых комплекснозначных функций $\varphi(t)$ на кривой Γ, для которых $\rho_{-1/p}\varphi \in L^p(\Gamma)$. Относительно соответствующей нормы

$$|\varphi| = \left(\int\limits_\Gamma |\rho_\lambda^{-1}(t)\varphi(t)|^p \frac{d_1 t}{\rho_1(t)} \right)^{1/p} \tag{1.2}$$

это пространство банахово. Здесь $d_1 t$ означает элемент длины дуги и, как обычно, две функции, отличающиеся друг от друга на множестве нулевой меры, отождествляются. Таким образом, $L^p_0(\Gamma, F)$ можно трактовать как L^p-пространство относительно меры $\rho_{-1} d_1 t$.

Весовое пространство $L^p_\lambda(\Gamma, F)$ состоит из всех функций $\varphi = \rho_\lambda \varphi_0$, $\varphi_0 \in L^p_0$б с перенесенной нормой. Конечно, при $F = \varnothing$ имеем обычное пространство $L^p(\Gamma)$. Это пространство возникает и когда все $\lambda_\tau = -1/p$. Заметим, что семейство банаховых пространств (L^p_λ) монотонно убывает (в смысле вложения) по всем параметрам λ_τ и p.

По этой же схеме вводится и весовое пространство Гёльдера. По определению пространство $C^\mu_0(\Gamma, F)$ состоит из всех непрерывных на $\Gamma \setminus F$ и ограниченных функций $\varphi(t)$, для которых $\psi = \rho_\mu \varphi$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем μ на Γ. Относительно нормы

$$|\varphi| = \sup_{t \in \Gamma \setminus F} |\varphi(t)| + \sup_{t_1 \neq t_2} \frac{|\psi(t_1) - \psi(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\mu} \tag{1.3}$$

это пространство банахово. Как и выше, весовое пространство $C^\mu_\lambda(\Gamma, F)$ состоит из всех функций $\varphi = \rho_\lambda \varphi_0$, $\varphi_0 \in C^\mu_0$, с перенесенной нормой. Полученное семейство банаховых пространств (C^μ_λ) также монотонно убывает (в смысле вложения) по всем параметрам λ_τ и μ. Аналогичным образом определяются и пространства $C^\mu_\lambda(\overline{D}, F)$ в областях D, ограниченных кусочно-гладким контуром Γ.

Принятое определение весовых пространств L^p_λ отличается от более распространенного определения весового пространства $L^p(\Gamma, \rho_\alpha)$ (см., например, [1, 2]), которое задается нормой

$$|\varphi| = \left(\int\limits_\Gamma |\varphi(t)|^p \rho_\alpha(t)\, d_1 t\right)^{1/p}.$$

Очевидно, при $p\lambda = -\alpha - 1$ оно совпадает с L^p_λ. Одно из достоинств принятого определения весовых пространств состоит в том, что при $-1 < \lambda < 0$ пространство $L^p_\lambda(\Gamma, F)$ содержится в классе $L^1(\Gamma)$ суммируемых функций. Аналогичный факт по отношению к $L^p(\Gamma, \rho_\alpha)$ определяется условием $-1 < \alpha < p - 1$, которое зависит от p. В дальнейшем всюду предполагается, что $p > 1$.

Рассмотрим в пространстве $l-$вектор-функций $\varphi \in L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, на кусочно-ляпуновском ориентируемым контуре Γ классический сингулярный интегральный оператор Коши

$$(K\varphi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t - t_0}, \quad t_0 \in \Gamma.$$

Хорошо известно [1, 2], что он ограничен в этом пространстве. Аналогичный результат для пространства $C^\mu_\lambda(\Gamma, F)$ принадлежит Р. В. Дудучава [3]. Без конкретизации показателя Гёльдера μ этот факт был известен ранее и изложен во многих монографиях (см. например, [4, 5]).

С сингулярным интегралом Коши тесно связан интеграл типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(t)dt}{t - z}, \quad z \notin \Gamma.$$

Также хорошо известно [6], что в предположении $\varphi \in L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, существуют угловые предельные значения $\phi^\pm(t_0)$ аналитической функции ϕ почти для всех $t_0 \in \Gamma$, где верхний и нижний знаки отвечают пределам соответственно слева и справа от контура (по отношению к его ориентации). При этом они связаны с сингулярным интегралом формулой Сохоцкого — Племеля

$$2\phi^\pm = \pm\varphi + K\varphi. \tag{1.4}$$

Если $\varphi \in C^\mu_\lambda(\Gamma, F)$, то эти пределы существуют в обычном смысле и ϕ принадлежит классу $C^\mu_\lambda(\overline{D}, F)$ в каждой связной компоненте D открытого множества $\mathbb{C} \setminus \Gamma$. Без уточнения показателя Гёльдера этот факт изложен, например, в монографии Н. И. Мусхелишвили [4].

Вместе с операторами умножения на кусочно-непрерывные $l \times l-$ матрицы-функции a, b сингулярный оператор Коши определяет оператор

$$2N = a(1 + K) + b(1 - K), \tag{1.5}$$

где 1 означает единичный оператор, который относим к первому типу.

В силу (1.4) уравнение $N\varphi = f$ равносильно краевой задаче линейного сопряжения

$$a\phi^+ - b\phi^- = f. \tag{1.6}$$

Теории фредгольмовой разрешимости этих операторов посвящена обширная литература. В скалярном случае $l = 1$ итог этой теории в общем случае кусочно-гладкой кривой подведен в известных монографиях Н. И. Мусхелишвили [4], Ф. Д. Гахова [5] (в весовых гёльдеровых пространствах) и Б. В. Хведелидзе [1], И. И. Данилюка [7] (в весовых лебеговых пространствах). Успех обусловлен тем фактом, что задача (1.6) решается эффективно в явном виде с помощью так называемой канонической функции.

В векторном случае $l > 1$ для произвольной кусочно-гладкой кривой развитые методы встречали определенные затруднения, связанные с тем, что в случае негладкого контура задача (1.6) не допускает эффективного решения, а интегральные операторы вида $aK - Ka$ и $K^2 - 1$ некомпактны. Эти операторы определяются ядрами приближенно однородных степени -1 относительно расстояний до узлов кривой. Теория фредгольмовой разрешимости операторов минимальной алгебры, порожденной операторами a и K, построена в монографии И. Ц. Гохберга и Н. И. Крупника [8]. В основе лежал локальный принцип, разработанный И. Б. Симоненко [9]. Другой подход, основанный на привлечении интегральных операторов с ядрами приближенно однородных степени -1 относительно расстояний до узлов кривой, был предложен в работах Р. В. Дудучава [3] и автора [10]. Современное состояние теории изложено в монографии С. Г. Михлина и Пресдорфа [2]. Сингулярные интегральные уравнения в векторном случае на гладком контуре в пространстве Гёльдера с весом подробно изучались в монографии Н. П. Векуа [11].

В случае, когда контур Γ служит границей некоторой области D и ориентирован положительно по отношению к ней, можно ввести $\mathbb{R}$-линейный сингулярный оператор $M_{\mathbb{R}}$ другого типа, действующий на вещественных l-вектор-функциях $\varphi \in L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, по формуле

$$M_{\mathbb{R}}\varphi = \mathrm{Re}[a(1 + K)\varphi]. \tag{1.7}$$

Он возникает естественным образом в связи с задачей Римана — Гильберта

$$\mathrm{Re}(a\phi^+) = f \tag{1.8}$$

для аналитической функции ϕ в области D. Именно, подстановка в это краевое условие интеграла типа Коши с плотностью φ в соответствии с формулой Сохоцкого — Племеля приводит к уравнению $M_{\mathbb{R}}\varphi = 2f$.

От оператора (1.7) можем перейти к $\mathbb{C}$-линейному оператору

$$2M_{\mathbb{C}} = a(1 + K) + \overline{a}(1 + \overline{K}),$$

действующему в пространстве комплекснозначных вектор-функций. Здесь черта над K означает операторную инволюцию комплексного сопряжения, т. е.

$\overline{K}\varphi = \overline{K\overline{\varphi}}$, где черта справа означает комплексное сопряжение функций. Легко видеть, что операторы $M_{\mathbb{R}}$ и $M_{\mathbb{C}}$ фредгольмово эквивалентны и их индексы (над полем $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно) совпадают. С другой стороны, если контур Γ ляпуновский, то операторы $\overline{K}$ отличается от K компактным слагаемым, так что с точностью до этого слагаемого оператор $M_{\mathbb{C}}$ имеет вид (1.5) с $b = \overline{a}$.

Ситуация существенно меняется в случае негладкого контура, когда оператор $\overline{K} - K$ не является компактным и принадлежит тому же типу, что и операторы $aK - Ka$, $K^2 - 1$, рассмотренные выше. В несколько более общей ситуации, о которой речь чуть ниже, теория фредгольмовости операторов $M_{\mathbb{C}}$ была построена в [10].

Классический оператор Коши допускает естественное обобщение. Пусть $l \times l$-матрица-функция $J(t)$ задана и непрерывна по Гёльдеру на контуре Γ, причем все ее собственные значения лежат в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\nu > 0$ в каждой точке $t \in \Gamma$. Удобно с комплексным числом $z = x + iy$ связать матрицу $z_{J(t)} = x1 + yJ(t)$, где 1 означает единичную $l\times l$-матрицу. Аналогичный смысл имеет обозначение $dz_{J(t)} = dx1 + J(t)\,dy$ по отношению к комплексному дифференциалу $dz = dx + i\,dy$. В частности,

$$dt = e(t)\,d_1t, \quad dt_{J(t)} = [e(t)]_{J(t)}\,d_1t, \tag{1.9}$$

где $e(t)$ — единичный касательный вектор $e_1(t) + ie_2(t)$ в точках $t \in \Gamma$, отличных от угловых, направление которого согласовано с ориентацией кривой, и d_1t означает элемент длины дуги. Заметим, что контур Γ кусочно-ляпуновский тогда и только тогда, когда функция $e(t)$ кусочно-гёльдерова.

Очевидно, при $z \neq 0$ матрица $z_{J(t)}$ обратима и обратная матрица $z^{-1}_{J(t)}$ однородна степени -1 по переменной z. В этих обозначениях сингулярный оператор с обобщенным ядром Коши определяется формулой

$$[K_{(J)}\varphi](t_0) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}(t - t_0)^{-1}_{J(t)}dt_{J(t)}\varphi(t), \quad t_0 \in \Gamma,$$

где $l \times l$-матричное выражение поставлено впереди l-вектора и действует на него по обычному правилу. Как показано в [12], этот оператор ограничен в пространствах $L^p_\lambda(\Gamma, F)$ и $C^\mu_\lambda(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$. Ядро этого типа возникает в связи с тем, что матрица-функция $X(z,t) = z^{-1}_{J(t)}$ по переменной $z = x + iy$ служит параметриксом для эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial U}{\partial y} - J(z)\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad z \in D.$$

Как установлено в [12], для граничных свойств соответствующих обобщенных интегралов типа Коши

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(t - z)^{-1}_{J(t)}dt_{J(t)}\varphi(t), \quad z \notin \Gamma,$$

справедливы результаты, аналогичные классическим интегралам типа Коши. В частности, имеет место аналог формулы Сохоцкого — Племеля (1.4), что открывает возможность исследования задачи линейного сопряжения для решений эллиптических систем [13].

Исходя из обобщенного оператора Коши $K_{(J)}$, аналогично (1.5), (1.7) можем ввести сингулярные интегральные операторы

$$2N = a(1 + K_{(J)}) + b(1 - K_{(J)}), \quad M_{\mathbb{R}}\varphi = \mathrm{Re}[a(1 + K_{(J)})\varphi]. \tag{1.10}$$

До сих пор контур Γ предполагался конечным, т. е. лежал в конечной части плоскости. Рассмотрим ситуацию, когда этот контур бесконечен. Если этот контур дополнить бесконечно удаленной точкой ∞, то на сфере Римана $\underline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ его связные компоненты по-прежнему гомеоморфны окружности. Для фиксированной точки $z_0 \notin \Gamma$ дробно-линейное преобразование

$$\delta(z) = (z - z_0)^{-1} \tag{1.11}$$

переводит Γ на конечный контур $\widetilde{\Gamma}$, проходящий через точку $z = 0$. По определению контур Γ кусочно-ляпуновский, если аналогичным свойством обладает $\widetilde{\Gamma}$.

Пусть конечное множество F содержит все угловые точки контура, включая бесконечно удаленную точку. По отношению к связным компонентам гладкой кривой $\Gamma \setminus F$ сохраняем прежние обозначения, в частности, контур Γ составлен из гладких дуг $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, сомкнутых или разомкнутых, конечных или бесконечных, которые попарно могут пересекаться только по своим концам, и простых гладких конечных контуров $\Gamma_{m+1}, \dots, \Gamma_n$, которые попарно не пересекаются между собой и с дугами. Например, граница первого квадранта представляет собой бесконечный контур, составленный из полуосей как двух бесконечных дуг с общими концами в точках $\tau = 0, \infty$. С другой стороны, граница бесконечной полосы является бесконечным контуром, состоящей из бесконечной сомкнутой дуги с общим концом $\tau = \infty$.

Класс $C(\Gamma, F)$ кусочно-непрерывных функций a, допускающих односторонние пределы $a(\tau \pm 0)$ в точках $\tau \in F$, определяется аналогично предыдущему. Условие Гёльдера с показателем μ на Γ можно ввести по отношению к евклидову расстоянию обычным образом, в частности, оно определяет класс $C^\mu(\Gamma)$ ограниченных функций. Заметим, что этому условию удовлетворяют и неограниченные функции, как показывает пример $\varphi(t) = |t|^\mu$. В противоположность этому обозначим через $\underline{C}^\mu(\Gamma)$ класс функций, который при преобразовании (1.11) переходит в $C^\mu(\widetilde{\Gamma})$. Если не пользоваться этим преобразованием, то функции φ этого класса удовлетворяют условию

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \le C\frac{|t_1 - t_2|^\mu}{(1 + |t_1|)^\mu(1 + |t_2|)^\mu}.$$

Часто в литературе [5] оно также называется условием Гёльдера (на неограниченных множествах). Аналогичным образом обозначим через $\underline{C}^\mu(\Gamma, F)$ класс кусочно-гёльдеровых функций на Γ, который переходит в $C^\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{F})$ при преобразовании (1.11). В частности, контур кусочно-ляпуновский тогда и только тогда, когда этому классу принадлежит функция $e(t)$.

Переходя к определению весовых пространств, введем весовую функцию $\rho_\lambda(t)$, которая введет себя аналогично (1.1) в окрестности конечных точек τ и как $(1)|t|^{\lambda_\infty}$ в окрестности ∞. В явном виде можно положить

$$\rho_\lambda(z) = (1+|z|)^{\lambda_\infty} \prod_{\tau\neq\infty} \left(\frac{|z-\tau|}{1+|z|}\right)^{\lambda_\tau}.$$

Тогда по отношению к этой весовой функции пространства $L_0^p(\Gamma,F)$ и $C_0^\mu(\Gamma,F)$ определяются по прежнему нормами (1.2) и (1.3). В свою очередь, они определяют и весовые пространства $L_\lambda^p = \rho_\lambda L_0^p$, $C_\lambda^\mu = \rho_\lambda C_0^\mu$.

Заметим, что пространство $L^p(\Gamma)$ совпадает с $L^p_{-1/p}(\Gamma,F)$ и в этом случае, однако $C_\mu^\mu(\Gamma,F)$ состоит из функций φ, которые удовлетворяют условию Гёльдера $|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| \le C|t_1-t_2|^\mu$ на кривой Γ и обращаются в нуль в конечных точках $\tau\in F$. В окрестности ∞ эти функции имеют поведение $O(|t|^\mu)$. В противоположность этому класс функций $\varphi\in \underline{C}^\mu(\Gamma)$, обращающихся в нуль во всех точках $\tau\in F$, совпадает с $C_\lambda^\mu(\Gamma,F)$, где $\lambda_\tau=\mu$ для конечных точек τ и $\lambda_\infty=-\mu$.

В отличие от случая конечного контура семейства этих пространств по параметру λ_∞ монотонно возрастают. Однако при $-1<\lambda<0$ функции данных пространств, умноженные на коэффициент $(1+|t|)^{-1}$, по-прежнему будут суммируемыми и на бесконечном контуре Γ. В частности, по отношению к матрице-функции $J(t)\in \underline{C}^\mu(\Gamma)$ можно в пространствах $L_\lambda^p(\Gamma,F)$ и $C_\lambda^\mu(\Gamma,F)$, где $-1<\lambda<0$, рассматривать обобщенный оператор Коши $K_{(J)}$ и отвечающий ему операторы (1.10).

Заметим, что в обозначениях (1.11) оператор $\varphi\to\widetilde{\varphi}$, где $\widetilde{\varphi}[\delta(t)]=\varphi(t)$, $t\in\Gamma$, осуществляет изоморфизм банаховых пространств $L_0^p(\Gamma,F)\to L_0^p(\widetilde{\Gamma},\widetilde{F})$ и $C_0^\mu(\Gamma,F)\to C_0^\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{F})$. В частности, этот факт приводит и к изоморфизмам $L_\lambda^p(\Gamma,F)\to L_{\widetilde{\lambda}}^p(\widetilde{\Gamma},\widetilde{F})$ и $C_\lambda^\mu(\Gamma,F)\to C_{\widetilde{\lambda}}^\mu(\widetilde{\Gamma},\widetilde{F})$, где

$$\widetilde{\lambda}_{\delta(\tau)}=\lambda_\tau,\ \tau\neq\infty;\quad \widetilde{\lambda}_0=-\lambda_\infty.$$

Эти и другие свойства весовых пространств L_λ^p и C_λ^μ подробно рассмотрены в [12].

Применительно к оператору $2N=a(1+K)+b(1-K)$ переход к бесконечному контуру не дает ничего нового. В самом деле, в обозначениях (1.11) рассмотрим весовую подстановку

$$\varphi\to\varphi^1(\overline{t})=\overline{t}^{-1}\widetilde{\varphi}(\overline{t}), \tag{1.12}$$

где в обозначениях (1.11) положено $\widetilde{\varphi}[\delta(t)]=\varphi(t)$. Эта подстановка осуществляет изоморфизм $L_\lambda^p(\Gamma,F)$ на банахово пространство $L^p_{\lambda^1}(\widetilde{\Gamma},\widetilde{F})$ с весовым порядком $\lambda^1=\big(\lambda^1_{\overline{\tau}},\overline{\tau}\in\widetilde{F}\big)$, который связан с λ соотношением

$$\lambda^1_{\delta(\tau)}=\lambda_\tau,\ \tau\neq\infty;\quad \lambda^1_0=-\lambda_\infty-1.$$

Нетрудно видеть, что при этой подстановке $(K\varphi)^1 = K^1\varphi^1$, где K^1 означает сингулярный оператор Коши K по отношению к кривой $\widetilde{\Gamma}$.

Таким образом, при подстановке (1.12) оператор $2N = a(1+K) + b(1-K)$, действующий в пространстве $L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, перейдет в аналогичный оператор $2N^1 = a^1(1+K^1) + b^1(1-K^1)$, где $a^1[\delta(t)] = a(t)$ и $b^1[\delta(t)] = b^1(t)$, ограниченный в пространстве $L^p_{\lambda^1}(\Gamma^1, F^1))$, $-1 < \lambda^1 < 0$.

Однако по отношению к оператору (1.7), а тем более к общим операторам (1.10) подобный прием уже невозможен, так что изучать их надо как для конечного, так и для бесконечного контуров отдельно. Удобно объединить эти два случая, которые различаем условиями соответственно $\infty \in F$ и $\infty \notin F$. При этом все рассмотрения проведем по отношению к пространствам L^p_λ, ограничившись для C^μ-случая краткими указаниями.

2. Основные результаты. При достаточно малом $\varrho > 0$ окрестность

$$B_\tau = \begin{cases} \{|z-\tau| < \varrho|\}, & \tau \neq \infty, \\ \{|z| > 1/\varrho\}, & \tau = \infty, \end{cases} \tag{2.1}$$

точки $\tau \in F$ разбивается контуром на две области $S_{\tau\pm 0}$ (по отношению к ориентации контура область $S_{\tau-0}$ лежит слева от Γ). При $\tau \neq \infty$ эти области являются криволинейными секторами, граница которых составлена из соответствующей дуги окружности $|z-\tau| = \varrho$ и двух боковых сторон – гладких дуг с общим концом τ, которые обозначим $G_{\tau\pm 0}$ (обход контура через точку τ осуществляется из $G_{\tau-0}$ в $G_{\tau+0}$). При этом окружности $|z-\tau| = s$, $0 < s \leq \varrho$, пересекают $S_{\tau-0}$ по круговой дуге, радиальная мера которой при $s \to 0$ стремится к некоторому числу $\theta_\tau \in [0, 2\pi]$, это число назовем раствором сектора $S_{\tau-0}$. Аналогичным свойством обладает и сектор $S_{\tau+0}$ с раствором $2\pi - \theta_\tau$. Эту терминологию сохраняем и в случае $\tau = \infty$, когда контур Γ бесконечен, в этом случае дуги $G_{\tau\pm 0}$ бесконечны и раствор секторов определяется по отношению к окружностям $|z| = 1/s$. Например, если Γ является границей первого квадранта с $F = \{0, \infty\}$, то $\theta_0 = \theta_\infty = \pi/2$. С другой стороны, если Γ является границей бесконечно полосы с $F = \{\infty\}$, то $\theta_\infty = 0$.

Не ограничивая общности, можно считать, что все окрестности (2.1) попарно не пересекаются. По отношению к кусочно-гёльдеровой функции $e(t)$ единичные векторы $q_{\tau\pm 0} = \pm e(\tau \pm 0)$ касательны к дуге $G_{\tau\pm 0}$ в точке τ и направлены от этой точки к второму концу дуги. Если эти векторы совпадают, то τ называем *точкой возврата* контура Γ. В дальнейшем предполагается, что контур Γ не содержит точек возврата. В этом случае $0 < \theta_\tau < 2\pi$ и, как легко видеть,

$$q_\tau = e^{i\theta_\tau} = q_{\tau\mp 0} q^{-1}_{\tau\pm 0}, \tag{2.2}$$

где выбирается верхний знак для конечных точек τ и нижний знак для $\tau = \infty$. В соответствии с этим правилом введем далее $l \times l$-матрицу

$$Q_\tau = (q_{\tau\mp 0})_{J(\tau)} (q_{\tau\pm 0})^{-1}_{J(\tau)}. \tag{2.3}$$

собственные значения которой не лежат на вещественной полуоси. В частности, вне этой полуоси функция $\ln w$, определяемая ветвью аргумента $0 < \arg w < 2\pi$, аналитична в окрестности этих собственных значений. Поэтому можно ввести комплексную степень $Q_\tau^\zeta = e^{\zeta \ln Q_\tau}$ матрицы Q_τ. Хорошо известно [14], что эту степень можно описать более явно, приводя матрицу Q_τ к блочно-диагональному виду с помощью некоторой обратимой матрицы T. Именно, пусть $\nu_1, \dots, \nu_n$ — все различные собственные значения $J(\tau)$, тогда комплексные числа

$$q_{\tau,j} = [(\operatorname{Re} q_{\tau\mp 0}) + \nu_j(\operatorname{Re} q_{\tau\mp 0})][(\operatorname{Re} q_{\tau\pm 0}) + \nu_j(\operatorname{Re} q_{\tau\pm 0})]^{-1}, \quad 1 \le j \le n,$$

пробегают собственные значения матрицы Q_τ, так что

$$T^{-1} Q_\tau T = \operatorname{diag}(q_{\tau,1} + \Delta_1, \dots, q_{\tau,n} + \Delta_n), \quad \Delta_j^l = 0,$$

с некоторыми нильпотентными матрицами Δ_j. В этих обозначениях аналогичную структуру имеют и комплексные степени матрицы:

$$T^{-1} Q_\tau^\zeta T = \operatorname{diag}[q_{\tau,1}^\zeta p_1(\zeta), \dots, q_{\tau,n}^\zeta p_n(\zeta)], \tag{2.4}$$

с матричными многочленами

$$p_j(\zeta) = 1 + \sum_{k=1}^{l-1} \frac{\zeta(\zeta-1)\cdots(\zeta-k+1)}{k!} \Delta_j^k.$$

Важно заметить, что матрицы $p_j(\zeta) - 1$ нильпотентны, так что $\det p_j(\zeta) \equiv 1$. Кроме того, они обладают свойством $p_j(-\zeta) = p_j^{-1}(\zeta)$.

С помощью этих комплексных степеней каждой обратимой в $C(\Gamma, F)$ матрице-функции $a(t)$ можем поставить в соответствие семейство аналитических на комплексной плоскости матриц-функций

$$\langle a \rangle_\tau(\zeta) = e^{2\pi i \zeta} - Q_\tau^\zeta a(\tau \mp 0) Q_\tau^{-\zeta} a^{-1}(\tau \pm 0), \quad \tau \in F, \tag{2.5}$$

где аналогично (2.2), (2.3) выбирается верхний знак для конечных точек τ и нижний знак для $\tau = \infty$.

Нетрудно показать, что на каждой прямой $\operatorname{Re}\zeta = s$ имеют место пределы

$$\begin{gathered} \lim_{\zeta \to -\infty} \det[(e^{2\pi i \zeta} - 1)^{-1} \langle a \rangle_\tau(\zeta)] = 1, \\ \lim_{\operatorname{Im}\zeta \to +\infty} \det[(e^{2\pi i \zeta} - 1)^{-1} \langle a \rangle_\tau \zeta] = \det[a(\tau \mp 0) a^{-1}(\tau \pm 0)]. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Вопрос о федгольмовости первого оператора в (1.10) решает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая Γ не содержит точек возврата, матрица-функция J принадлежит $\underline{C}^\mu(\Gamma)$ с некоторым $0 < \mu < 1$, причем собственные значения матрицы $J(t)$ лежат в верхней полуплоскости в каждой точке $t \in \Gamma$.*

В этих предположениях оператор N фредгольмов в пространстве $L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, тогда и только тогда, когда матрицы-функции a, b обратимы в $C(\Gamma, F)$ и выполнено условие

$$\det\langle a^{-1}b\rangle_\tau(\zeta) \neq 0, \quad \operatorname{Re}\zeta = \lambda_\tau, \tag{2.7}$$

во всех точках $\tau \in F$. При этом индекс оператора N дается равенством

$$\operatorname{ind} N = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}[\ln\det(a^{-1}b)]_{\Gamma_j} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{\tau} \pm[\ln\det[(e^{2\pi i\zeta} - 1)^{-1}\langle a^{-1}b\rangle_\tau(\zeta)]_{\operatorname{Re}\zeta=\lambda_\tau}, \tag{2.8}$$

где приращение на кривых Γ_j берется в соответствии с их ориентацией, на прямой $\operatorname{Re}\zeta = \lambda_\tau$ — в соответствии с ее естественной ориентацией и верхний (нижний) знак отвечает $\tau \neq \infty$ ($\tau \neq \infty$).

Заметим, что в силу (2.6) величина в правой части (2.8) действительно является целым числом. В случае, когда контур Γ конечен, а матрица-функция J постоянна и имеет единственное собственное значение $\nu = i$, теорема 2.1 установлена автором [10]

Если $F = \varnothing$, т. е. если Γ является гладким контуром, условие (2.7) и второе слагаемое в правой части (2.8) нужно опустить, так что теорема согласуется с классическими результатами, хорошо известными [4] в этом случае. Особо отметим также классический случай оператора (1.5), когда матрица-функция J постоянна, скалярна и тождественно равна i. В этом случае (2.5) переходит в

$$\langle a\rangle_\tau(\zeta) = e^{2\pi i\zeta} - a_{(\tau)}, \quad a_{(\tau)} = a(\tau \mp 0)a^{-1}(\tau \pm 0), \tag{2.9}$$

и теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Пусть кусочно-ляпуновский контур Γ не содержит точек возврата.*

Тогда фредгольмовость оператора $2N = a(1 + K) + b(1 - K)$ равносильна тому, что матрицы-функции a, b обратимы в $C(\Gamma, F)$ и в обозначениях (2.9) при каждом τ собственные значения матрицы $(a^{-1}b)_{(\tau)}$ не лежат на луче $\arg z = 2\pi\lambda_\tau$. При этом

$$\operatorname{ind} N = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}[\ln\det(a^{-1}b)]_{\Gamma_j} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{\tau} \pm \sum_{\nu}\ln\nu, \tag{2.10}$$

где внутренняя сумма берется по всем собственным значениям ν матрицы $(a^{-1}b)_{(\tau)}$ с учетом их кратности, причем значение $\ln\nu$ выбрано по условию $2\pi\lambda_\tau < \arg\nu < 2\pi + 2\pi\lambda_\tau$.

Как отмечено выше в п. 1, в несколько иной формулировке теорема 2 принадлежит И. Ц. Гохбергу и Н. И. Крупнику [7].

Обратимся ко второму оператору в (1.10), для которого проблема фредгольмовости существенно усложняется. Пусть контур Γ служит границей некоторой области D и ориентирован положительно по отношению к ней. В частности, криволинейный сектор $D \cap B_\tau$ совпадает с $S_\tau = S_{\tau-0}$. С матрицей Q_τ

свяжем матрицу $Q^*_\tau = (\overline{Q_\tau})^{-1}$, собственные значения которой также лежат вне положительной полуоси, так что можно ввести ее комплексную степень $(Q^*_\tau)^\zeta$. Аналогичный смысл имеют матрицы $(\overline{Q}_\tau)^\zeta$ и $(Q^{-1}_\tau)^\zeta$.

Исходя из обратимой в $C(\Gamma, F)$ матрицы-функции a, аналогично (2.5) можем ввести аналитическую матрицу-функцию $\langle a\rangle^*_\tau(\zeta)$ равенством

$$\langle a\rangle^*_\tau(\zeta) = \big[(\overline{Q}_\tau)^\zeta \big(Q^{-1}_\tau\big)^\zeta - 1\big]\big[(Q^*_\tau)^\zeta Q^\zeta_\tau - (Q^*_\tau)^\zeta a(\tau-0)(Q^*_\tau)^{-\zeta} a^{-1}(\tau+0)\big]$$

для конечных точек τ и равенством

$$\langle a\rangle^*_\tau(\zeta) = \big[(\overline{Q}_\tau)^\zeta \big(Q^{-1}_\tau\big)^\zeta - 1\big]\big[Q^\zeta_\tau (Q^*_\tau)^\zeta - Q^\zeta_\tau a(\tau+0) Q^{-\zeta}_\tau a^{-1}(\tau-0)\big]$$

для $\tau = \infty$. Можно показать, что свойство (2.5) выполняется и по отношению к этой функции.

Теорема 3. *Пусть кусочно-ляпуновский контур Γ не содержит точек возврата, матрица-функция J принадлежит $\underline{C}^\mu(\Gamma)$ с некоторым $0 < \mu < 1$, собственные значения матрицы $J(t)$ лежат в верхней полуплоскости для всех $t \in \Gamma$.*

В этих предположениях оператор $M\varphi = \mathrm{Re}[a(1 + K_{(J)})\varphi]$ фредгольмов в пространстве $L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $-1 < \lambda < 0$, тогда и только тогда, когда матрица-функция a обратима в $C(\Gamma, F)$ и выполнено условие

$$\det\langle a^{-1}\overline{a}\rangle^*_\tau(\zeta) \neq 0; \quad \mathrm{Re}\,\zeta = \lambda_\tau, \tag{2.11}$$

во всех точках $\tau \in F$. При выполнении этих условий индекс этого оператора дается равенством

$$\mathrm{ind}\, M = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^n [\ln\det(a^{-1}\overline{a})]_{\Gamma_j} - \frac{1}{2\pi i}\sum_\tau \pm[\ln\det[(e^{2\pi i\zeta} - 1)^{-2}\langle a^{-1}\overline{a}\rangle^*_\tau(\zeta)]_{\mathrm{Re}\,\zeta=\lambda_\tau}, \tag{2.12}$$

где верхний (нижний) знак отвечает $\tau \neq \infty$ $(\tau = \infty)$.

В случае, когда контур Γ конечен, а матрица-функция J постоянна и имеет единственное собственное значение $\nu = i$, теорема 3 также установлена автором в [10].

Если $F = \varnothing$, т. е. если Γ является гладким контуром, условие (2.11) и второе слагаемое в правой части (2.12) нужно опустить, так что теорема согласуется с классическими результатами, хорошо известными [4] в этом случае.

Рассмотрим классический случай оператора (1.7), когда матрица-функция J постоянна, скалярна и тождественно равна i. В этом случае

$$(Q^*_\tau)^\zeta Q^\zeta_\tau = e^{2i\theta_\tau\zeta}, \quad (\overline{Q}_\tau)^\zeta (Q^{-1}_\tau)^\zeta = e^{2i(2\pi-\theta_\tau)\zeta},$$

так что

$$\langle a\rangle^*_\tau(\zeta) = (e^{2i(2\pi-\theta_\tau)\zeta} - 1)[e^{2i\theta_\tau\zeta} - a^*_{(\tau)}], \quad a^*_{(\tau)} = a(\tau \mp 0)a^{-1}(\tau \pm 0),$$

и теорему 3 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 4. *Пусть кусочно-ляпуновская кривая* Γ *не содержит точек возврата.*

Тогда фредгольмовость оператора $M\varphi = \operatorname{Re}[a(1+K)\varphi]$ *в пространстве* $L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $-1/2 \le \lambda < 0$, *равносильна тому, что матрица-функция* a *обратима в* $C(\Gamma, F)$ *и при каждом* τ *собственные значения матрицы* $(a^{-1}\overline{a})_{(\tau)}$ *не лежат на луче* $\arg z = 2\theta_\tau\lambda_\tau$, *где* θ_τ *— раствор сектора* S_τ. *При этом*

$$\operatorname{ind} M = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}[\ln\det(a^{-1}\overline{a})]_{\Gamma_j} - \frac{1}{2\pi i}\sum_{\tau}\pm\sum_{\nu}\ln\nu,$$

где сумма берется по всем собственным значениям ν *матрицы* $(a^{-1}\overline{a})^*_{(\tau)}$ *с учетом их кратности, причем значение* $\ln\nu$ *выбрано по условию* $2\theta_\tau\lambda_\tau < \arg\nu < 2\pi + 2\theta_\tau\lambda_\tau$.

Особо остановимся на операторе M с коэффициентом $a = 1$. В вопросе о представлении функций обобщенными интегралами типа Коши с вещественной плотностью важную роль играет случай, когда этот оператор фредгольмов индекса нуль.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 3 *имеют место следующие утверждения.*

(a) *Пусть в каждой точке* $\tau \in F$ *матрица* $J(\tau)$ *треугольна. Тогда оператор* $M\varphi = \operatorname{Re}[(1+K_{(J)})\varphi]$ *фредгольмов в пространстве* $L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $-1/2 \le \lambda < 0$, *и его индекс равен нулю.*

(b) *Пусть в каждой точке* $\tau \in F$ *матрица* $J(\tau)$ *коммутирует с* $\overline{J(\tau)}$. *Тогда существует такое* δ *в интервале* $(0, 1/2]$, *что оператор* $M\varphi = \operatorname{Re}[(1+K_{(J)})\varphi]$ *фредгольмов в пространстве* $L^p_\lambda(\Gamma, F)$, $-\delta \le \lambda < 0$, *и его индекс равен нулю.*

Если дополнительно матрица $J(\tau)$ *блочно-диагональна и каждый ее диагональный блок имеет единственное собственное значение, то можно положить* $\delta = 1/2$.

При надлежащих предположениях относительно кусочной гёльдеровости коэффициентов a, b все приведенные результаты переносятся и на пространства $C^\mu_\lambda(\Gamma, F)$. Заметим, что функция φ принадлежит пространству $C^\mu_\lambda(\Gamma, F)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C^\mu(G)$ на каждой гладкой конечно-разомкнутой дуге $G \subseteq \Gamma \setminus F)$ и $\varphi \in C^\mu_{\lambda_\tau}(G_{\tau\pm 0}, \tau)$ на всех дугах $G_{\tau\pm 0}$, $\tau \in F$.

Этот прием положим в основу определения класса $\mathscr{C}^\mu_0(\Gamma, F)$. Именно, он состоит из всех кусочно-непрерывных $l \times l$=матриц-функций $a(t)$ на Γ, которые принадлежат $C^{\mu+\varepsilon}(G)$ на каждой гладкой конечной разомкнутой дуге $G \subseteq \Gamma\setminus F)$ с некоторым $\varepsilon > 0$ и для которых

$$a(t) - a(\tau \pm 0) \in \begin{cases} C^{\mu+\varepsilon}_{\varepsilon}(G_{\tau\pm 0}, \tau), & \tau \ne \infty, \\ C^{\mu+\varepsilon}_{-\varepsilon}(G_{\tau\pm 0}, \tau), & \tau \ne \infty, \end{cases}$$

на всех дугах $G_{\tau\pm 0}$, $\tau \in F$. Заметим, что функции этого класса кусочно-гёльдеровы на Γ, точнее, принадлежат $\underline{C}^\varepsilon(\Gamma, F)$ с некоторым $\varepsilon > 0$.

Точно так же обозначим через $\mathscr{C}^\mu(\Gamma)$ объединение классов $C^{\mu+\varepsilon}(\Gamma)$ по всем достаточно малым $\varepsilon > 0$. Аналогичный смысл имеет и класс $\underline{\mathscr{C}}^\mu(\Gamma)$.

Теорема 5. *Пусть кусочно-непрерывная функция* e, *фигурирующая в* (1.9), *принадлежит классу* $\mathscr{C}_0^\mu(\Gamma, F)$, *матрица-функция* $J(t)$ *принадлежит* $\underline{\mathscr{C}}^\mu(\Gamma)$ *и коэффициенты* a, b *принадлежат* $\mathscr{C}_0^\mu(\Gamma, F)$.

Тогда в теоремах 1–4 *и лемме* 1 *символ* L^p_λ *можно заменить на* C^μ_λ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши для разрывных краевых задач голоморфных функций одной комплексной переменной. Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1975. Т. 7. С. 5–162. (Итоги науки и техники).
2. *Mikhllin S. G., Prossdorf S.* Singular integral operators. Berlin: Akademie-Verl.; Springer-Verl., 1986.
3. *Дудучава Р. В.* Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбил. мат. ин-та АН ГрССР. 1979. Т. 60. С. 1–135.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
5. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. 3-е изд. М.: Наука, 1977.
6. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. 2-е изд. М.: Наука, 1967.
7. *Данилюк И. И.* Нерегулярные краевые задачи. М.: Наука, 1975
8. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. И.* Введение в теорию одномерных сингулярных уравнений. Кишинев: Штиинца, 1973.
9. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений // I: Изв. АН СССР. Сер. мат. 1965. Т. 29, № 3. С. 567–586; II: Изв. АН СССР Сер. мат. 1965. Т. 29, № 4. С. 757–782.
10. *Солдатов А. П.* Одномерные сингулярные операторы и краевые задачи теории функций. М.: Высшая школа, 1991.
11. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970.
12. *Солдатов А. П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63, № 1. С. 1–189.
13. *Солдатов А. П., Чернова О. В.* Задача Римана — Гильберта для эллиптических систем первого порядка на плоскости с постоянными старшими коэффициентами // Итоги науки и техники. Сер. Современ. математика и ее прил. Темат. обзоры. 2018. Т. 149. С. 95–102.
14. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 12 апреля 2021 г.
После доработки 8 июля 2021 г.
Принята к публикации 26 августа 2021 г.

Солдатов Александр Павлович
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН,
ул. Вавилова, 40, Москва 119333;
Московский центр фундаментальной и прикладной математики;
Региональный научно-образовательный математический центр ЮФУ
soldatov48@gmail.com

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

UDC 517.9

SINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH GENERALIZED CAUCHY KERNEL ON PIECEWISE SMOOTH CONTOUR

A. P. Soldatov

Abstract: Singular integral operators of two types are considered on a piecewise smooth contour in weighted Lebesgue spaces with generalized Cauchy kernels, related to the parametrix of elliptic systems of first order on the plane. The operators of the first type are linear over the field of complex numbers and are represented as a usual combination of the generalized singular Cauchy operator and the operators of multiplication by piecewise continuous matrix functions. The operators of the second type act in the space of real vector functions and, thus, are linear over $\mathbb{R}$. They arise in the direct reduction of elliptic boundary problems using integral representations. A criterion is obtained for these operators to be Fredholm, and a formula for their index is indicated.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.52.22.005

Keywords: singular integral operator, first-order elliptic systems, generalize Cauchy kernels, piecewise smooth contour, index formula.

REFERENCES

1. *Khvedelidze B. V.*, "The method of Cauchy-type integrals in discontinuous boundary value problems of the theory of holomorphic functions of a complex variable," J. Sov. Math., **7**, 309–414 (1977).
2. *Mikhllin S. G. and Prossdorf S.* Singular Integral Operators, Akad.-Verl.; Springer-Verl., Berlin (1986).
3. *Duduchava R. V.*, "Integral equations of convolution type with discontinuous presymbols, singular integral equations with fixed singularities and their applications to some problems of mechanics [in Russian]," Tr. Tbilis. Mat. Inst. Razmadze, **60**, 1–135 (1979).
4. *Muskhelishvili N. I.*, Singular Integral Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1968).
5. *Gakhov F. D.*, Boundary Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1977).
6. *Privalov I. I.*, Boundary Properties of Analytic Functions [in Russian], Nauka, Moscow (1967).
7. *Danilyuk I. I.*, Irregular Boundary Problems [in Russian], Nauka, Moscow (1975).
8. *Gokhberg I. Ts. and Krupnik N. Ya.*, Introduction to the Theory of One-Dimensional Singular Equations [in Russian], Stiinca, Kishinev (1995).
9. *Simonenko I. B.*, "A new general method for studying linear operator equations of the type of singular integral equations [in Russian]," Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat., **29**, 567–586, 757–782 (1965).
10. *Soldatov A. P.*, One-Dimensional Singular Operators and Boundary Value Problems in Function Theory [in Russian], Vysshaya Shkola, Moscow (1991).
11. *Vekua I. N.*, Systems of Singular Integral Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1970).
12. *Soldatov A. P.*, "Singular integral operators and elliptic boundary value problems [in Russian]," Sovremen. Mat. Fundament. Napravl., **63**, No. 1, 1–189 (2017).
13. *Soldatov A. P. and Chernova O. V.*, "The Riemann–Hilbert problem for elliptic systems of first order on the plane with constant leading coefficients [in Russian]," Itogi Nauki i Tekhniki, Ser. Sovremen. Mat. Pril., Temat. Obzory, **149**, 95–102 (2018).

14. *Gantmakher F. P.*, Matrix Theory [in Russian], Nauka, Moscow (1988).

Submitted April 12, 2021
Revised July 08, 2021
Accepted August 26, 2021

Alexander P. Soldatov
Federal Research Center "Informatics and Control" of the Russian Academy of Sciences,
40 Vavilov Street, Moscow 119333, Russia;
Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics;
Regional Scientific and Educational Mathematical Center YuFU
soldatov48@gmail.com