

УДК 517.97

ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ЖЕСТКОГО
ВКЛЮЧЕНИЯ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ
ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА — ЛЯВА
С УСЛОВИЯМИ НЕПРОНИКАНИЯ
ДЛЯ ИЗВЕСТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ИЗГИБА
Н. П. Лазарев, Е. Ф. Шарин, Г. М. Семенова

Аннотация. Изучена нелинейная модель, описывающая равновесие пластины Кирхгофа — Лява с трещиной и объемным жестким включением. Предполагается, что под действием определенных заданных нагрузок пластина имеет деформации с определенной заранее известной конфигурацией кромок вблизи трещины. На кривой в срединной плоскости, соответствующей трещине, заданы краевые условия непроникания в виде системы неравенств и равенства. Рассматривается семейство вариационных задач, зависящих от параметра, который задает расположение включений. Формулируется задача оптимального управления с функционалом качества, определенным с помощью произвольного непрерывного функционала, заданного на подходящем пространстве Соболева. Для этой задачи параметр расположения включения выступает функцией контроля. Для семейства задач о равновесии доказана непрерывная зависимость решений от параметра расположения включения, а также разрешимость задачи оптимального управления.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.49.33.002

Ключевые слова: вариационное неравенство, трещина, условия непроникания, задача оптимального управления, жесткое включение.

Авторы поздравляют глубокоуважаемого коллегу, опытного руководителя, директора НИИ математики СВФУ, профессора, доктора физико-математических наук, действительного члена АН РС(Я) Ивана Егоровича Егорова с юбилейным годом, и желают ему крепкого здоровья, дальнейших творческих успехов!

1. Введение

Создание и применение высокотехнологичных композитов с оптимальными свойствами является одной из основ технологического процесса. Разработка и

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 18-29-10007 mk).

внедрение композитов включает предварительную стадию численного моделирования, основанного на применении подходящих математических моделей. На этой стадии оптимальные геометрические и механические свойства композитов могут быть предвидены и улучшены. Соответствие численных экспериментов реальным процессам во многом зависит от качеств выбранной математической модели. В этой связи обоснование и изучение наиболее точных математических моделей, описывающих напряженно-деформированное состояние композитов, является актуальным направлением научных исследований. Хорошо известно, что вследствие производственных нагрузок или особенностей условий эксплуатации неоднородные свойства композитов могут привести к образованию трещин. Для тел с трещинами адекватность той или иной математической модели реальному физическому процессу (явлению) зависит в значительной степени от выбора тех или иных граничных условий на трещине.

С математической точки зрения наличие трещины приводит к таким формулировкам задач, в которых области имеют нерегулярные компоненты границ. Это обстоятельство представляет одну из главных трудностей в теории трещин [1–6]. Анализ влияния геометрических и физических свойств включений на напряжения вблизи кончика трещины является одной из трудных и актуальных задач теории трещин [7–11]. Следует отметить, что задание граничных условий в виде равенств на трещине может привести к физическому противоречию, поскольку это условие не исключает возможности взаимного проникания точек разных берегов трещины друг в друга [1, 2, 5, 6]. Отметим, что в [5, 6] на основе численных экспериментов показано, что берега трещины могут проникать друг в друга в случаях, когда условие непроникания не задается.

Альтернативный подход к формулировке задач теории трещин, который исключает взаимное проникание берегов трещины, развивается с 1990-х гг. Этот подход характеризуется граничными условиями типа Синьорини, заданными на берегах трещины [1, 4, 9, 12–23]. В течение последних десяти лет в рамках моделей с условиями непроникания опубликовано большое количество статей, касающихся оптимизации форм для включений с отслоением, см., например, [24–30].

В настоящей работе изучена нелинейная модель, описывающая равновесие упругой пластины с жестким объемным включением. Рассмотрено семейство вариационных задач, которые зависят от параметра расположения жесткого включения. Предполагается, что включение меняет свое местоположение вдоль графика некоторой заданной непрерывной функции. Важно отметить, что функция графика может не удовлетворять условию Липшица. Для этого семейства задач мы формулируем задачу оптимального управления с функционалом качества, определенным с помощью произвольного непрерывного функционала, заданного на подходящем пространстве Соболева. Управлением в этой задаче выступает параметр t , характеризующий расположение включения. До-

казана непрерывная зависимость решений семейства задач по отношению к параметру t . Найдены достаточные условия на функции внешних нагрузок, обеспечивающие разрешимость задачи оптимального управления.

В предыдущих результатах, относящихся к оптимальному размеру или расположению жестких включений в упругих телах [29, 31, 32], рассматриваются такие функции внешних нагрузок, которые не изменяются при вариации расположения или же размера жесткого включения. В отличие от этого подхода в настоящей работе исследуется более общий случай, когда внешние нагрузки зависят непрерывным образом от t . Отметим, что такой способ задания внешних нагрузок является с физической точки зрения более обоснованным.

2. Семейство вариационных задач

Начнем с описания допустимой геометрии. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\Gamma \in C^{2,1}$. Предположим, что липшицева кривая $\gamma \subset \Omega$ без самопересечений имеет следующие свойства. Предположим, что γ может быть продолжена таким образом, что это продолжение пересекает Γ в двух точках и тем самым разбивает Ω на две подобласти Ω_1 и Ω_2 с липшицевыми границами $\partial\Omega_1, \partial\Omega_2$, $\text{meas}(\Gamma \cap \partial\Omega_i) > 0$, $i = 1, 2$. Относительно выбранной нормали $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ к γ определяются берега γ^+, γ^- кривой γ . Скачок $[q]$ функции q на кривой γ находится по формуле $[q] = q|_{\gamma^+} - q|_{\gamma^-}$. Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. Пусть ω_0 — односвязная область класса $C^{2,1}$ такая, что $(0, x_2^0) \in \omega_0$, $\bar{\omega}_0 \subset \Omega_\gamma$. Рассмотрим семейство областей $\{\omega_t\}$, $t \in [0, T]$, определенных равенством

$$\omega_t = \{x + (t, \psi(t)) \mid x \in \omega_0\}, \quad \psi(t) \in C[0, T], \quad \psi(0) = x_2^0.$$

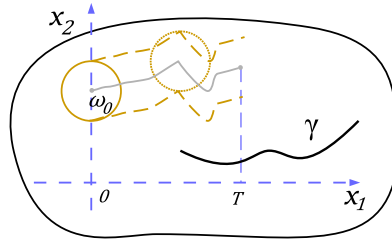


Рис. 1. Геометрия задачи.

Пусть выполнено следующее предположение.

Предположение 2.1. Объединение всех областей ω_0^T , определенное с помощью соотношения

$$\omega_\lambda^\beta = \bigcup_{t \in [\lambda, \beta]} \omega_t, \quad 0 \leq \lambda < \beta \leq T,$$

удовлетворяет условиям $\overline{\omega}_0^T \cap \overline{\gamma} = \overline{\omega}_0^T \cap \Gamma = \emptyset$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Заметим, что в соответствии с предположением 2.1 существуют некоторые области O, O_ω с гладкими границами $\partial O, \partial O_\omega$ класса $C^{2,1}$ такие, что $\overline{\omega}_0^T \subset O_\omega, \overline{O}_\omega \subset O, \overline{O} \subset \Omega_\gamma$.

Чтобы убедиться в справедливости замечания, приведем кратко доказывающую схему рассуждений. Очевидно, что существует замкнутая кривая Ξ , ограничивающая односвязную липшицеву область S_Ξ такую, что $\overline{\omega}_0^T \subset S_\Xi, \overline{S_\Xi} \subset \Omega_\gamma$. Далее применяем результат, доказанный в [33], в котором липшицева область приближается областями с регулярными границами.

Замечание 2.1 дает возможность использования хорошо известных результатов, касающихся пространств $H^2(S)$ для областей S с границей ∂S класса $C^{2,1}$, а именно, будут применены теоремы о следах [34] и следующая характеристика:

$$v \in H_0^2(S) \Leftrightarrow v \in H^2(S), \quad v = \frac{\partial v}{\partial m} = 0 \quad \text{на} \quad \partial S,$$

где m — единичная нормаль к ∂S .

Пусть произвольная область вида $\omega_{t'}$, соответствующая фиксированному параметру $t' \in [0, T]$, удовлетворяет следующему предположению.

Предположение 2.2. Пусть $t' \in [0, T]$. Для любой строго внутренней подобласти $D \subset \omega_{t'}$ существует достаточно малое положительное число $\delta > 0$ такое, что $D \subset \omega_{t'} \cap \omega_t$ для всех $t \in (t' - \delta, t' + \delta) \cap [0, T]$.

ПРИМЕР 2.1. Для областей, заданных кругами, пример негладкой кривой, удовлетворяющей предположению 2.2, дается непрерывной функцией $\psi(t) = 1 - \sqrt[3]{\left|t - \frac{T}{2}\right|}$. В точке $t = \frac{T}{2}$ условие Липшица не выполняется.

Для того чтобы сформулировать математическую модель рассмотрим трехмерное декартово пространство $\{x_1, x_2, z\}$, выбранное таким образом, чтобы множество $\{\Omega_\gamma\} \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3$ соответствовало срединной плоскости пластины. Предположим, что толщина пластины постоянна и равна 2. Кривая γ задает трещину (разрез) в пластине. Это означает, что сквозная трещина описывается цилиндрической поверхностью, заданной соотношениями:

$$x = (x_1, x_2) \in \gamma, \quad -1 \leq z \leq 1,$$

где $|z|$ — расстояние до срединной поверхности. Зафиксируем параметр $t \in [0, T]$ и предположим, что область ω_t соответствует жесткому включению, а область $\Omega_\gamma \setminus \overline{\omega}_t$ — упругой части пластины.

Обозначим через $\chi = \chi(x) = (W, w)$ вектор перемещений срединной плоскости ($x \in \Omega_\gamma$), где $W = (w_1, w_2)$ — перемещения в плоскости $\{x_1, x_2\}$, w — перемещения вдоль оси z . Тензор деформаций и тензор усилий обозначены следующим образом: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(W), \sigma_{ij} = \sigma_{ij}(W)$ соответственно [1]:

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right), \quad \sigma_{ij}(W) = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(W), \quad i, j = 1, 2,$$

где $\{c_{ijkl}\}$ — заданный тензор коэффициентов упругости, обладающий свойствами симметричности и положительной определенности:

$$c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega_\gamma),$$

$$c_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2 \quad \forall \xi, \quad \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad i, j = 1, 2, \quad c_0 = \text{const} > 0.$$

Обозначим моменты следующим образом [1]:

$$m_{ij}(w) = d_{ijkl}w_{,kl}, \quad i, j = 1, 2 \quad \left(w_{,kl} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_l} \right),$$

где тензор $\{d_{ijkl}\}$ имеет те же свойства, что и тензор $\{c_{ijkl}\}$. Пусть $B(S, \cdot, \cdot)$ — билинейная форма, определенная равенством

$$B(S, \chi, \bar{\chi}) = \int_S \{ \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W}) + m_{ij}(w) \bar{w}_{,ij} \} dx, \quad (1)$$

где $\chi = (W, w)$, $\bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w})$ и S — некоторая подобласть Ω_γ .

Функционал потенциальной энергии выражается следующей формулой [1]:

$$\Pi(\Omega_\gamma, \chi) = \frac{1}{2} B(\Omega_\gamma, \chi, \chi) - \int_{\Omega_\gamma} F_t \chi dx, \quad \chi = (W, w),$$

где вектор $F_t = (f_{1t}, f_{2t}, f_{3t}) \in C([0, T]; L_2(\Omega))^3$ задает внешние силы [1]. Этому пространству принадлежат, например, функции, заданные равенствами

$$F_t = (f_{1t}, f_{2t}, f_{3t}), \quad f_{it} = A_i \chi_{\omega_t} + B_i \chi_{\Omega_\gamma \setminus \bar{\omega}_t}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

где χ_{ω_t} , $\chi_{\Omega_\gamma \setminus \bar{\omega}_t}$ — характеристические функции соответствующих множеств, A_i , B_i , $i = 1, 2, 3$, — некоторые заданные функции из $L_2(\Omega_\gamma)$, не зависящие от $t \in [0, T]$. В самом деле, поскольку f_{it} , $f_{i\hat{t}}$ совпадают на множествах $(\omega_{\hat{t}} \cap \omega_t)$, $\Omega \setminus (\omega_{\hat{t}} \cup \omega_t)$, имеем равенство

$$\|f_{it} - f_{i\hat{t}}\|_{L_2(\Omega_\gamma)}^2 = \int_{\omega_t \setminus \omega_{\hat{t}}} (f_{it} - f_{i\hat{t}})^2 dx + \int_{\omega_{\hat{t}} \setminus \omega_t} (f_{it} - f_{i\hat{t}})^2 dx, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3)$$

В силу предположения 2.2 меры множеств $\text{meas}(\omega_{\hat{t}} \setminus \omega_t)$, $\text{meas}(\omega_t \setminus \omega_{\hat{t}})$ стремятся к нулю при $t \rightarrow \hat{t}$, поэтому в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега правая часть выражений (3) стремится к нулю. Отметим, что в указанном виде (2) представима функция силы тяжести, действующая на единицу объема в зависимости от плотности материала.

Введем пространства Соболева

$$H^{1,0}(\Omega_\gamma) = \{v \in H^1(\Omega_\gamma) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma\},$$

$$H^{2,0}(\Omega_\gamma) = \left\{ v \in H^2(\Omega_\gamma) \mid v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma \right\},$$

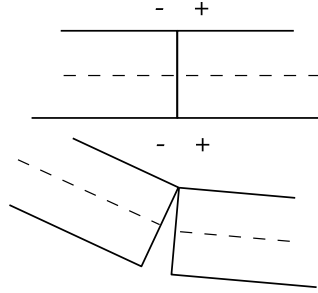


Рис. 2. Пример конфигурации берегов трещины в начальном состоянии (верхний рисунок) и в состоянии равновесия (нижний рисунок).

$$H(\Omega_\gamma) = H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2 \times H^{2,0}(\Omega_\gamma),$$

где $n = (n_1, n_2)$ — единичная внешняя нормаль к границе Γ области Ω . Следует отметить, что по предположению, выполненному для области Ω_γ , неравенства Фридрикса и Корна справедливы в негладкой области Ω_γ [1, 35]. С их помощью можно вывести оценки

$$B(\Omega_\gamma, \chi, \chi) \geq c \|\chi\|^2 \quad \forall \chi \in H(\Omega_\gamma) \quad (\|\chi\| = \|\chi\|_{H(\Omega_\gamma)}) \quad (4)$$

с константой $c > 0$, не зависящей от χ [1].

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Неравенство (4) обеспечивает эквивалентность обычной нормы в $H(\Omega_\gamma)$ и полунормы, определенной с помощью левой части равенства (4).

Используя термин «жесткое включение», мы подразумеваем, что перемещения в пределах данного включения имеют специальный вид, например, для области ω_t (с фиксированным произвольным значением $t \in [0, T]$), перемещения $\chi|_{\omega_t} = \zeta$ принадлежат следующему пространству $R(\omega_t)$ инфинитезимальных жестких перемещений на ω_t :

$$R(\omega_t) = \{ \zeta(x) = (\rho, l) \mid \rho(x) = b(x_2, -x_1) + (c_1, c_2); l(x) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, x \in \omega_t \}, \quad (5)$$

где $b, c_1, c_2, a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ (см. [13]). Для описания возможного контактного взаимодействия берегов трещины в случае заранее известной конфигурации вблизи трещины в равновесном состоянии (рис. 2), будем использовать следующее условие непроникания [21, 22]:

$$\left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \geq 0, \quad [W]\nu \geq \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right], \quad [w] = 0 \quad \text{на } \gamma, \quad (6)$$

где $[v] = v^+ - v^-$ — скачок функции v , следы v^\pm на γ^+, γ^- соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормали ν . Отметим, что если условие (6) выполнено для некоторой функции, то для нее также выполнено следующее хорошо известное общее условие непроникания для вертикальных

трещин в пластине Кирхгофа — Лява [1, 3]:

$$[W]\nu \geq \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right| \quad \text{на } \gamma. \quad (7)$$

Предположим, что $t \in [0, T]$ фиксировано. Задача о равновесии пластины с трещиной и жестким включением может быть сформулирована в виде следующей задачи минимизации:

$$\text{найти } \xi_t = (U_t, u_t) \in K_t \quad \text{такие, что} \quad \Pi(\Omega_\gamma, \xi_t) = \inf_{\chi \in K_t} \Pi(\Omega_\gamma, \chi), \quad (8)$$

где множество допустимых функций имеет вид

$$K_t = \{\chi = (W, w) \in H(\Omega_\gamma) \mid \chi \text{ удовлетворяет (6); } \chi|_{\omega_t} \in R(\omega_t)\}.$$

В соответствии с [3, 13] для каждого фиксированного $t \in [0, T]$ задача (8) имеет единственное решение $\xi_t \in K_t$, которое удовлетворяет вариационному неравенству

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\Omega_\gamma, \xi_t, \chi - \xi_t) \geq \int_{\Omega_\gamma} F_t(\chi - \xi_t) dx \quad \forall \chi \in K_t. \quad (9)$$

3. Задача оптимального управления

Пусть $G : H(\Omega_\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ — произвольный непрерывный функционал. Рассмотрим функционал качества, определенный равенством

$$J(t) = G(\xi_t)$$

на промежутке $[0, T]$.

В качестве примера таких функционалов, имеющих физический смысл, можно дать функционал $G_1(\chi) = \|\chi - \chi_0\|_{H(\Omega_\gamma)}$, который характеризует отклонение от заданной функции $\chi_0 \in H(\Omega_\gamma)$. Также следует отметить, что при дополнительных предположениях на F_t , Ω и γ существует первая производная

$$G_2(\chi) = \left. \frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; \chi^\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon; \chi^\varepsilon)$ по отношению к параметру возмущения области ε при $\varepsilon = 0$. Здесь χ^ε обозначает соответствующие решения для задач равновесия относительно возмущенных областей Ω_ε . Предлагаем читателю обратиться к [36] для ознакомления с явной формулой для производной функционала энергии. Как следует из [36], функционал, который выражает первую производную, непрерывен в пространстве $H(\Omega_\gamma)$. Итак, рассмотрим задачу оптимального управления:

$$\text{найти } t^* \in [0, T] \text{ такую, что } J(t^*) = \sup_{t \in [0, T]} J(t). \quad (10)$$

Это означает, что мы хотим найти наилучшее расположение включения вдоль графика функции ψ , которое доставляет максимальное значение для функционала качества.

Настоящая работа следует схеме рассуждений статьи [32], отличие состоит в том, что функция внешних нагрузок зависит от параметра t . Это вполне обоснованно с точки зрения физики. Кроме того, отличие состоит также в наборе краевых условий на кривой трещины — они соответствуют специальному случаю конфигурации берегов трещины. Основной результат, полученный в настоящем пункте, представлен в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Задача оптимального управления (10) имеет решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{t_n\}$ — максимизирующая последовательность. Ввиду ограниченности интервала $[0, T]$ существует сходящаяся числовая подпоследовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ такая, что

$$t_{n_k} \rightarrow t^* \quad \text{при } k \rightarrow \infty, \quad t^* \in [0, T].$$

Легко видеть, что если существует подпоследовательность $\{t_{n_l}\} \subset \{t_{n_k}\}$ со следующими свойствами: $t_{n_l} \equiv t^*$, $l \in \mathbb{N}$, то $J(t^*)$ — решение задачи (10). Поэтому предположим, что $t_{n_k} \neq t^*$ для достаточно больших k .

Ввиду леммы 2, которая доказана далее, решения ξ_k задач (8), соответствующие параметрам t_{n_k} , сходятся к решению ξ_{t^*} сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$. Это позволяет установить сходимость

$$J(t_{n_k}) \rightarrow J(t^*),$$

которая влечет равенство

$$J(t^*) = \sup_{t \in [0, T]} J(t).$$

Теорема доказана.

В ходе доказательства были применены две вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Пусть $t^* \in [0, T]$ — фиксированное вещественное число, и пусть $\{t_n\} \subset [0, T]$ — последовательность вещественных чисел, сходящаяся к t^* при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любой функции $\eta = (V, v) \in K_{t^*}$ найдутся последовательность чисел $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{\eta_k\}$ такие, что $\eta_k \in K_{t_k}$, $k \in \mathbb{N}$ и $\eta_k \rightarrow \eta$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем $\eta \in K_{t^*}$. Прежде всего отметим, что если существует подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$ такая, что $t_{n_k} = t^*$, то утверждение леммы верно для $\eta_k \equiv \eta$, $k \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности можно считать, что $\{t_n\}$ — строго монотонно убывающая последовательность такая, что

$$t^* = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n.$$

Обозначим через $\zeta^* = (\rho^*, l^*)$ функцию, описывающую структуру перемещений η в области ω_{t^*} , где $\rho^* = b^*(x_2, -x_1) + (c_1^*, c_2^*)$, $l^*(x) = a_0^* + a_1^*x_1 + a_2^*x_2$. Доопределим функцию $\zeta^* = (\rho^*, l^*)$ на всей области Ω с помощью равенств

$$\zeta^* = (\rho^*, l^*), \text{ где } \rho^* = b(x_2, -x_1) + (c_1^*, c_2^*), \ x \in \Omega, \ l^*(x) = a_0^* + a_1^*x_1 + a_2^*x_2, \ x \in \Omega.$$

Пусть $\delta > 0$ — фиксированное положительное число. Далее зафиксируем произвольное значение $t \in [0, T] \cap (t^*, t^* + \delta)$ и рассмотрим следующее семейство вспомогательных задач:

$$\text{найти элемент } Q_t \in K'_t \text{ такой, что } p(Q_t) = \inf_{\chi \in K'_t} p(\chi), \quad (11)$$

где $p(\chi) = B(\Omega_\gamma, \chi - \eta, \chi - \eta)$,

$$K'_t = \left\{ \chi = (W, w) \in H(\Omega_\gamma) \mid \chi = \eta, \frac{\partial w}{\partial \mu} = \frac{\partial v}{\partial \mu} \text{ на } \partial O, \right. \\ \left. \chi|_{\omega_{t^*}} = \zeta^*, \ \chi = \eta \text{ в } \Omega \setminus \overline{O} \right\}, \quad (12)$$

где μ — единичная нормаль к ∂O . Очевидно, что функционал $p(\chi)$ коэрцитивен и слабо полунепрерывен снизу на пространстве $H(\Omega_\gamma)$. Нетрудно проверить, что множество K'_t выпуклое и замкнутое на $H(\Omega_\gamma)$. Эти свойства обеспечивают существование решения η_t задачи (11), кроме того, оно будет единственным [1]. Это решение эквивалентно характеризуется вариационным неравенством

$$\eta_t \in K'_t, \quad B(\Omega_\gamma, Q_t - \eta, \chi - Q_t) \geq 0 \quad \forall \chi \in K'_t. \quad (13)$$

Таким образом, построено семейство вспомогательных задач (11), зависящих от параметра $t \in [0, T] \cap (t^*, t^* + \delta)$. Применяя оператор поднятия для гладких областей $\Omega \setminus \overline{O}$ и $O \setminus \overline{O}_\omega$ (см. замечание 2.1), можно построить функции $\widehat{\chi} \in H(\Omega_\gamma)$ такие, что $\widehat{\chi} = \zeta^*$ в O_ω и $\widehat{\chi} = \eta$, $\frac{\partial \widehat{w}}{\partial \mu} = \frac{\partial v}{\partial \mu}$ на ∂O . Поскольку $\widehat{\chi}$ принадлежит K'_t для всех $t \in [0, T] \cap (t^*, t^* + \delta)$, ее можно подставить в (13) в качестве тестовой, что влечет, в свою очередь,

$$B(\Omega_\gamma, Q_t - \eta, \widehat{\chi}) + B(\Omega_\gamma, \eta, Q_t) \geq B(\Omega_\gamma, Q_t, Q_t) \quad \forall t \in [0, T] \cap (t^*, t^* + \delta).$$

Из этого соотношения и неравенства (4) получаем следующую равномерную оценку сверху:

$$\|Q_t\| \leq c \quad \forall t \in [0, T] \cap (t^*, t^* + \delta).$$

Следовательно, можно извлечь из последовательности $\{Q_{t_n}\}$ подпоследовательность $\{Q_l\}$, которая определяется равенствами $Q_l = Q_{t_{n_l}}$, $l \in \mathbb{N}$ (для удобства в дальнейшем определяем последовательность $\{t_l\}$ равенством $t_l = t_{n_l}$) и $\{Q_l\}$ слабо сходится к некоторой функции $\widetilde{\eta}$ в $H(\Omega_\gamma)$. Теперь необходимо показать, что $\widetilde{\eta} = \eta$. По построению ввиду гладкости областей $O \setminus \overline{\omega}_{t^*}$ включение $(Q_l - \eta) \in H_0^1(O \setminus \overline{\omega}_{t^*})^2 \times H_0^2(O \setminus \overline{\omega}_{t^*})$ выполнено. Как следствие, имея в виду слабую замкнутость $H_0^1(O \setminus \overline{\omega}_{t^*})^2 \times H_0^2(O \setminus \overline{\omega}_{t^*})$, получим

$$(\widetilde{\eta} - \eta) \in H_0^1(O \setminus \overline{\omega}_{t^*})^2 \times H_0^2(O \setminus \overline{\omega}_{t^*}).$$

Рассмотрим тестовые функции вида $\chi_l^\pm = Q_l \pm \alpha$, где α — функция, определяемая нулевым продолжением произвольной функции $\tilde{\alpha} \in C_0^\infty(O \setminus \bar{\omega}_{t^*})^3$ в Ω_γ . Заметим, что при достаточно больших l функции χ_l^\pm принадлежат K'_{t_l} . Подставляя χ_l^+ и χ_l^- в (13), а затем сравнивая полученные неравенства, находим

$$Q_l \in K'_{t_l}, \quad B(\Omega_\gamma, Q_l - \eta, \alpha) = 0. \quad (14)$$

Зафиксируем α и перейдем к пределу в (14). В результате установим, что

$$B(\Omega_\gamma, \tilde{\eta} - \eta, \alpha) = B(O \setminus \bar{\omega}_{t^*}, \tilde{\eta} - \eta, \alpha) = 0 \quad \forall \alpha \in C_0^\infty(\Omega_\gamma \setminus \bar{\omega}_{t^*})^3. \quad (15)$$

В силу предположения 2.1 область $O \setminus \bar{\omega}_{t^*}$ принадлежит классу $C^{2,1}$, поэтому пространство $C_0^\infty(O \setminus \bar{\omega}_{t^*})$ плотно как в пространстве $H_0^1(O \setminus \bar{\omega}_{t^*})$, так и в пространстве $H_0^2(O \setminus \bar{\omega}_{t^*})$. Это означает, что равенство (15) влечет, что $\tilde{\eta} - \eta = 0$ в $H_0^1(O \setminus \bar{\omega}_{t^*})^2 \times H_0^2(O \setminus \bar{\omega}_{t^*})$. По построению равенство $\tilde{\eta} = \eta$ выполнено в областях ω_{t^*} и $\Omega \setminus \omega_{t^*}$. Следовательно, $\tilde{\eta} = \eta$ в $H(\Omega_\gamma)$. В результате существует подпоследовательность $\{Q_l\}$ такая, что $Q_l \in K'_{t_l}$, $l \in \mathbb{N}$, и $Q_l \rightarrow \eta$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$ при $l \rightarrow \infty$. Теперь мы можем доказать сильную сходимость. В силу теоремы Мазура существуют функция $N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ и последовательность наборов действительных чисел $\{r(n)_i \mid i = n, \dots, N(n)\}$, удовлетворяющих $r(n)_i \geq 0$ и $\sum_{i=n}^{N(n)} r(n)_i = 1$, таких, что последовательность $\{\hat{Q}_n\}$, определенная через суммы

$$\hat{Q}_n = \sum_{i=n}^{N(n)} r(n)_i Q_i,$$

сходится к η сильно в $H(\Omega_\gamma)$. Наконец, определим требуемую последовательность $\{\eta_{n_k}\}$ с помощью равенств

$$\eta_{n_1} = \hat{Q}_{N(1)}, \quad \eta_{n_2} = \hat{Q}_{N(N(1))}, \dots, \eta_{n_k} = \hat{Q}_{N^k(1)}, \dots$$

Построенные функции η_{n_k} , $k = 1, 2, \dots$, принадлежат множествам $K_{t_{N^k(1)}}$, соответствующим элементам подпоследовательности $\{t_{N^k(1)}\}$ последовательности $\{t_l\} \subset \{t_n\}$.

В другом случае, а именно, когда последовательность $\{t_n\}$ является строго монотонно возрастающей последовательностью, нужно рассмотреть множества K'_{t^*} , которые определяются с помощью областей ω_{t^*} , для фиксированного $t \in [0, T] \cap (t^* - \delta, t^*)$, где $\delta > 0$. Лемма 1 доказана.

Теперь докажем вспомогательное утверждение, которое использовалось при доказательстве теоремы 1.

Лемма 2. Пусть $t^* \in [0, T]$ — фиксированное вещественное число. Тогда $\xi_t \rightarrow \xi_{t^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $t \rightarrow t^*$, где ξ_t, ξ_{t^*} являются решениями задачи (8), соответствующими параметрам $t \in [0, T]$, $t^* \in [0, T]$.

Доказательство. Докажем от противного. Предположим, что существуют число $\epsilon_0 > 0$ и последовательность $\{t_n\} \subset (0, T]$ такие, что

$$t_n \rightarrow t^*, \quad \|\xi_n - \xi_{t^*}\| \geq \epsilon_0,$$

где $\xi_n = \xi_{t_n}$, $n \in \mathbb{N}$, — решения (8), соответствующие t_n .

В силу того, что $\chi^0 \equiv 0$ принадлежит K_t для всех $t \in [0, T]$, можно подставить $\chi = \chi^0$ в (9) для любого фиксированного $t \in [0, T]$. Это доставляет

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\Omega_\gamma, \xi_t, \xi_t) \leq \int_{\Omega_\gamma} F_t \xi_t dx \quad \forall t \in [0, T]. \quad (16)$$

Поскольку $F_t \in C([0, T]; L_2(\Omega))^3$, существует постоянная $C > 0$, для которой $\|F_t\|_{L_2(\Omega)^3} < C$, для всех $t \in [0, T]$. Поэтому из (16) следует равномерная по параметру $t \in [0, T]$ оценка

$$\|\xi_t\| \leq c.$$

Значит, существует подпоследовательность $\{\xi_n\}$, обозначаемая прежним образом, такая, что ξ_n сходится к функции $\tilde{\xi}$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$.

Покажем, что $\tilde{\xi} \in K_{t^*}$. Действительно, имеем $\xi_n|_{\omega_{t_n}} = \zeta_n \in R(\omega_{t_n})$. Согласно теореме вложения Соболева [34] получаем, что

$$\xi_n|_{\omega_{t_n}} \rightarrow \tilde{\xi}|_{\omega_{t^*}} \quad \text{сильно в } L_2(\omega_{t^*})^3 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (17)$$

$$U_n|_\gamma \rightarrow \tilde{U}|_\gamma \quad \text{сильно в } L_2(\gamma)^2 \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (18)$$

$$\left. \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right|_\gamma \rightarrow \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} \right|_\gamma \quad \text{сильно в } L_2(\gamma) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Выбирая при необходимости подпоследовательности, считаем, что при $n \rightarrow \infty$ имеет место сходимость $\xi_n \rightarrow \tilde{\xi}$ п.в. на ω_{t^*} .

Далее зафиксируем произвольную строго внутреннюю подобласть $D \subset \omega_{t^*}$. Существует достаточно большое число N такое, что если $n \geq N$, то $D \subset \omega_{t_n} \cap \omega_n$ (см. предположение 2.2). Стало быть, последовательность $\{\rho_n\}$ сходится к $\tilde{\xi}$ п.в. в D при $n \rightarrow \infty$. Это позволяет сделать вывод, что каждая из числовых последовательностей $\{b^n\}$, $\{c_1^n\}$, $\{c_2^n\}$, $\{a_{0n}\}$, $\{a_{1n}\}$, $\{a_{2n}\}$, определяющих структуру ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, в D , ограничена в \mathbb{R} . Таким образом, можно выделить подпоследовательности (с сохранением обозначений) такие, что

$$b_n \rightarrow b, \quad a_{0n} \rightarrow a_0, \quad c_{in} \rightarrow c_i, \quad a_{in} \rightarrow a_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Следовательно, для фиксированной области D имеем

$$U_k \rightarrow (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2) \quad \text{п.в. в } D \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

$$u_k \rightarrow a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \quad \text{п.в. в } D \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Последние два соотношения вместе с (17) приводят к равенствам

$$\tilde{U} = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2) \quad \text{п.в. в } D,$$

$$\tilde{u} = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \quad \text{п.в. в } D.$$

В силу произвольности области $D \subset \omega_{t^*}$ получаем, что

$$\tilde{U} = (bx_2 + c_1, -bx_1 + c_2) \quad \text{п.в. в } \omega_{t^*},$$

$$\tilde{u} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \quad \text{п.в. в } \omega_{t^*},$$

откуда следует, что $\tilde{\xi}|_{\omega_{t^*}} \in R(\omega_{t^*})$.

Обратимся к условию непроникания в определении множества K_{t^*} . Нужно показать, что $\tilde{\xi}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} \right] \geq 0, \quad [\tilde{U}] \nu \geq \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} \right], \quad [\tilde{u}] = 0 \quad \text{на } \gamma. \quad (20)$$

Принимая во внимание сходимости (18), при необходимости можем еще раз выделить подпоследовательности такие, что

$$U_n|_\gamma \rightarrow \tilde{U}|_\gamma, \quad \left. \frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right|_\gamma \rightarrow \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} \right|_\gamma \quad \text{п.в. на } \gamma^+ \text{ и } \gamma^-.$$

Этот факт позволяет перейти к пределу в следующих неравенствах и равенстве:

$$\left[\frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right] \geq 0, \quad [U_n] \nu \geq \left| \left[\frac{\partial u_n}{\partial \nu} \right] \right|, \quad [u_n] = 0 \quad \text{на } \gamma,$$

и получить требуемое соотношение (20). Следовательно, получаем включение $\tilde{\xi} \in K_{t^*}$.

Приступим к доказательству равенства $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$ и существования последовательности решений $\{\xi_n\}$, $\xi_n = \xi_{t_n}$, $n \in \mathbb{N}$, сходящейся сильно к ξ_{t^*} в $H(\Omega_\gamma)$. Сначала докажем, что $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$. Для этого проанализируем вариационные неравенства (9) и их предельный случай. Из леммы 1 следует, что для всех $\eta \in K_{t^*}$ существуют подпоследовательности $\{t_k\} = \{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность функций $\{\eta_k\}$ такая, что $\eta_k \in K_{t_k}$ и $\eta_k \rightarrow \eta$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $k \rightarrow \infty$.

Принимая во внимание сходимости $F_{n_k} \rightarrow F_{t^*}$ в $L_2(\Omega_\gamma)^3$ при $k \rightarrow \infty$, где F_{n_k} соответствует t_{n_k} , $k \in \mathbb{N}$, а также установленные выше свойства сходящихся последовательностей $\{\eta_k\}$ и $\{\xi_n\}$ можно перейти к пределу при $k \rightarrow \infty$ в следующих неравенствах, полученных из (9) для t_k и тестовых функций η_k :

$$B(\Omega_\gamma, \xi_{n_k}, \eta_{n_k} - \xi_{n_k}) \geq \int_{\Omega_\gamma} F_{n_k}(\eta_{n_k} - \xi_{n_k}) dx. \quad (21)$$

В результате имеем

$$B(\Omega_\gamma, \tilde{\xi}, \eta - \tilde{\xi}) dx \geq \int_{\Omega_\gamma} F_{t^*}(\eta - \tilde{\xi}) dx \quad \forall \eta \in K_{t^*}.$$

Поскольку η выбиралось произвольным, последнее неравенство является вариационным. Однозначная разрешимость этого вариационного неравенства дает $\tilde{\xi} = \xi_{t^*}$.

Для завершения доказательства следует установить сильную сходимость $\xi_n \rightarrow \xi_{t^*}$. Подстановка $\chi = 2\xi_t$ и $\chi = 0$ в вариационные неравенства (9) для $t \in [0, T]$ позволяет прийти к равенствам

$$\xi_t \in K_t, \quad B(\Omega_\gamma, \xi_t, \xi_t) = \int_{\Omega_\gamma} F_t \xi_t dx \quad \forall t \in [0, T]. \quad (22)$$

Равенства (22) вместе со слабой сходимостью $\xi_n \rightarrow \xi_{t^*}$ в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \rightarrow \infty$ влекут следующую цепочку соотношений:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(\Omega_\gamma, \xi_n, \xi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\gamma} F_{t_n} \xi_n \, dx = \int_{\Omega_\gamma} F_{t^*} \xi_{t^*} \, dx = B(\Omega_\gamma, \xi_{t^*}, \xi_{t^*}).$$

Отсюда ввиду эквивалентности норм (см. замечание 2.2) заключаем, что $\xi_n \rightarrow \xi_{t^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, получили противоречие с исходным предположением. Лемма 2 доказана.

4. Заключение

Проведен анализ семейства вариационных задач, описывающих равновесие пластины с жестким включением и трещиной, которые зависят от параметра расположения включения $t \in [0, T]$. Существование решения задачи оптимального управления (10) доказано. Для этой задачи функционал качества $J(t)$ определен с помощью произвольного непрерывного функционала, заданного на подходящем пространстве Соболева, в то время как параметр t служит управлением. Леммы 1 и 2 выявляют качественную связь между задачами о равновесии для тел с различным расположением жестких включений одинаковой формы. Отметим, что этот подход может быть применен для задач о равновесии пластин Кирхгофа — Лява с классическими линейными условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khudnev A. M., Kovtunenkov V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton: WIT Press, 2000.
2. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984.
3. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
4. *Khudnev A., Leugering G.* On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks // *Math. Method Appl. Sci.* 2010. V. 33, N 16. P. 1955–1967.
5. *Rudoy E. M., Kazarinov N. A., Slesarenko V. Y.* Numerical simulation of equilibrium of an elastic two-layer structure with a through crack // *Numer. Anal. Appl.* 2017. V. 10, N 1. P. 63–73.
6. *Rudoy E.* Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition // *ESAIM. Math. Model. Numer. Anal.* 2016. V. 50, N 4. P. 995–1009.
7. *Leugering G., Sokolowski J., Zochowski A.* Control of crack propagation by shape-topological optimization // *Discret. Contin. Dyn. Syst. Ser. A.* 2015. V. 35, N 6. P. 2625–2657.
8. *Kovtunenkov V. A., Leugering G.* A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model // *SIAM J. Control Optim.* 2016. V. 54, N 3. P. 1329–1351.
9. *Khudnev A. M.* Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions // *Eur. J. Mech. A. Solids.* 2010. V. 29, N 3. P. 392–399.
10. *Khudnev A., Sokolowski J., Szulc K.* Shape and topological sensitivity analysis in domains with cracks // *Appl. Math.* 2010. V. 55, N 6. P. 433–469.
11. *Xavier M., Novotny A. A., Sokolowski J.* Crack growth control based on the topological derivative of the Rice's integral // *J. Elast.* 2019. V. 134, N 2. P. 175–191.
12. *Khudnev A. M., Faella L., Popova T. S.* Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // *Math. Mech. Solids.* 2017. V. 22, N 4. P. 1–14.

13. *Khudnev A. M.* Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate // *Mechanics of Solids*. 2010. V. 45, N 5. P. 733–742.
14. *Khudnev A. M., Popova T. S.* Junction problem for Euler-Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // *Quart. Appl. Math.* 2016. V. 74, N 4. P. 705–718.
15. *Kazarinov N. A., Rudoy E. M., Slesarenko V. Y., Shcherbakov V. V.* Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion // *Comput. Math. Math. Phys.* 2018. V. 58, N 5. P. 761–774.
16. *Shcherbakov V. V.* The Griffith formula and J -integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // *Z. Angew. Math. Mech.* 2016. V. 96, N 11. P. 1306–1317.
17. *Popova T., Rogerson G. A.* On the problem of a thin rigid inclusion embedded in a Maxwell material // *Z. Angew. Math. Phys.* 2016. V. 67, N 4. 105.
18. *Pyatkina E. V.* Optimal control of the shape of a layer shape in the equilibrium problem of elastic bodies with overlapping domains // *J. Appl. Indust. Math.* 2016. V. 10, N 3. P. 435–443.
19. *Lazarev N., Everstov V.* Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack // *Z. Angew. Math. Mech.* 2019. V. 99, N 3. e201800268.
20. *Itou H., Kovtunen V. A., Rajagopal K. R.* Well-posedness of the problem of non-penetrating cracks in elastic bodies whose material moduli depend on the mean normal stress // *Int. J. Eng. Sci.* 2019. V. 136, P. 17–25.
21. *Lazarev N. P., Itou H.* Equilibrium problems for Kirchhoff-Love plates with nonpenetration conditions for known configurations of crack edges // *Мат. заметки СВФУ*. 2020. Т. 27, № 3. С. 52–65.
22. *Lazarev N. P., Semenova G. M., Romanova N. A.* On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff-Love plate with a crack // *J. Sib. Federal University. Mathematics and Physics*. 2021. V. 14, N 1. P. 28–41.
23. *Furtsev A., Itou H., Rudoy E.* Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation // *Int. J. Solids Struct.* 2020. V. 182–183, P. 100–111.
24. *Shcherbakov V. V.* Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks // *Z. Angew. Math. Phys.* 2016. V. 67, N 3. 71.
25. *Khudnev A., Negri A.* Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks // *Z. Angew. Math. Phys.* 2013. V. 64, N 1. P. 179–191.
26. *Itou H., Khudnev A. M.* On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // *Math. Method. Appl. Sci.* 2016. V. 39, N 17. P. 4980–4993.
27. *Khudnev A. M.* Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies // *Arch. Appl. Mech.* 2013. V. 83, N 10. P. 1493–1509.
28. *Rudoy E. M., Shcherbakov V. V.* Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion // *Sib. Electron. Math. Rep.* 2016. V. 13, N 1. P. 395–410.
29. *Lazarev N. P.* Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack // *Z. Angew. Math. Mech.* 2016. V. 96, N 4. P. 509–518.
30. *Khudnev A. M., Novotny A. A., Sokolowski J., Zochowski A.* Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions // *J. Mech. Phys. Solids*. 2009. V. 57, N 10. P. 1718–1732.
31. *Lazarev N. P., Rudoy, E. M.* Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge // *Z. Angew. Math. Mech.* 2017. V. 97, N 9. P. 1120–1127.
32. *Lazarev N., Itou H.* Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous Kirchhoff-Love plates with a crack // *Math. Mech. Solids*. 2019. V. 24, N 12. P. 3743–3752.
33. *Doktor P.* Approximation of domains with Lipschitzian boundary // *Časopis pro pěstování matematiky*. 1976. V. 101. P. 237–255.
34. *Baiocchi C., Capelo A.* Variational and quasi variational inequalities. New York: J. Wiley and Sons, 1984.
35. *Hlaváček I., Haslinger J., Nečas J., Lovíšek J.* Solution of variational inequalities in mechanics. New York: Springer-Verl., 1988.

- 36.** Rudoy E., Shcherbakov V. First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks // Appl. Math. Optim. 2020. <https://doi.org/10.1007/s00245-020-09729-5>

Поступила в редакцию 12 марта 2021 г.

После доработки 19 мая 2021 г.

Принята к публикации 26 мая 2021 г.

Лазарев Нюргун Петрович, Шарин Евгений Федорович,
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
nyurgun@ngs.ru, ef.sharin@s-vfu.ru

Семенова Галина Михайловна
Якутское отделение Регионального научно-образовательного центра
«Дальневосточный центр математических исследований»,
ул. Белинского, 58, Якутск 677891
sgm.08@yandex.ru

OPTIMAL LOCATION OF A RIGID INCLUSION
FOR AN EQUILIBRIUM PROBLEM
DESCRIBING KIRCHHOFF–LOVE PLATE WITH
NONPENETRATION CONDITIONS FOR KNOWN
CONFIGURATIONS OF PLATE EDGES

N. P. Lazarev, E. F. Sharin,
and G. M. Semenova

Abstract: A nonlinear model describing equilibrium of a cracked plate with a volume rigid inclusion is studied. It is assumed that under the action of certain given loads, plates have deformations with a certain predetermined configuration of edges near the crack. On the crack curve we impose a nonlinear boundary condition as a system of inequalities and an equality describing the nonpenetration of the opposite crack faces. For a family of variational problems, we study the dependence of their solutions on the location of the inclusion. We formulate an optimal control problem with a cost functional defined by an arbitrary continuous functional on a suitable Sobolev space. For this problem, the location parameter of the inclusion serves as a control parameter. We prove continuous dependence of the solutions on the location parameter and the existence of a solution to the optimal control problem.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.49.33.002

Keywords: variational inequality, crack, nonpenetration conditions, optimal control problem, rigid inclusion.

REFERENCES

1. *Khudnev A. M. and Kovtunenkov V. A.*, Analysis of Cracks on Solids, WIT Press, Southampton; Boston (2000).
2. *Morozov N. F.*, Mathematical Problems of the Theory of Cracks [in Russian], Nauka, Moscow (1984).
3. *Khudnev A. and Leugering G.*, “On elastic bodies with thin rigid inclusions and cracks,” Math. Methods Appl. Sci., **33**, No. 16, 1955–1967 (2010).
4. *Khudnev A. M.*, Elasticity Problems in Non-smooth Domains [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
5. *Rudoy E. M., Kazarinov N. A., and Slesarenko V. Y.*, “Numerical simulation of equilibrium of an elastic two-layer structure with a through crack,” Numer. Anal. Appl., **10**, No. 1, 63–73 (2017).
6. *Rudoy E.*, “Domain decomposition method for crack problems with nonpenetration condition,” ESAIM Math. Model. Numer. Anal., **50**, No. 4, 995–1009 (2016).
7. *Leugering G., Sokolowski J., and Zochowski A.*, “Control of crack propagation by shape-topological optimization,” Discrete Contin. Dyn. Syst., Ser. B., **35**, No. 6, 2625–2657 (2015).
8. *Kovtunenkov V. A. and Leugering G.*, “A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model,” SIAM J. Control Optim., **54**, No. 3, 1329–1351 (2016).

9. *Khudnev A. M.*, “Optimal control of crack growth in elastic body with inclusions,” *Eur. J. Mech., A, Solids*, **29**, No. 3, 392–399 (2010).
10. *Khudnev A., Sokołowski J., and Szulc K.*, “Shape and topological sensitivity analysis in domains with cracks,” *Appl. Math.*, **55**, No. 6, 433–469 (2010)
11. *Xavier M., Novotny A. A., and Sokołowski J.*, “Crack growth control based on the topological derivative of the Rice’s integral,” *J. Elast.*, **134**, N. 2, 175–191 (2019).
12. *Khudnev A. M., Faella L., and Popova T. S.*, “Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies,” *Math. Mech. Solids*, **22**, No. 4, 1–14 (2017).
13. *Khudnev A. M.*, “Problem of a crack on the boundary of a rigid inclusion in an elastic plate,” *Mech. Solids*, **45**, No. 5, 733–742 (2010).
14. *Khudnev A. M. and Popova T. S.*, “Junction problem for Euler–Bernoulli and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies,” *Q. Appl. Math.*, **74**, No. 4, 705–718 (2016).
15. *Kazarinov N. A., Rudoy E. M., Slesarenko V. Y., and Shcherbakov V. V.*, “Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion,” *Comp. Math. Math. Phys.*, **58**, No. 5, 761–774 (2018).
16. *Shcherbakov V. V.*, “The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions,” *Z. Angew. Math. Mech.*, **96**, No. 11, 1306–1317 (2016).
17. *Popova T. and Rogerson G. A.*, “On the problem of a thin rigid inclusion embedded in a Maxwell material,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **67**, No. 4, 105 (2016).
18. *Pyatkina E. V.*, “Optimal control of the shape of a layer shape in the equilibrium problem of elastic bodies with overlapping domains,” *J. Appl. Ind. Math.*, **10**, No. 3, 435–443 (2016).
19. *Lazarev N. and Everstov V.*, “Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack,” *Z. Angew. Math. Mech.*, **99**, No. 3, e201800268 (2019).
20. *Itou H., Kovtunenkov V. A., and Rajagopal K. R.*, “Well-posedness of the problem of non-penetrating cracks in elastic bodies whose material moduli depend on the mean normal stress,” *Int. J. Eng. Sci.*, **136**, 17–25 (2019).
21. *Lazarev N. P. and Itou H.*, “Equilibrium problems for Kirchhoff–Love plates with nonpenetration conditions for known configurations of crack edges,” *Mat. Zamet. SVFU*, **27**, No. 3, 52–65 (2020).
22. *Lazarev N. P., Semenova G. M., and Romanova N. A.*, “On a limiting passage as the thickness of a rigid inclusions in an equilibrium problem for a Kirchhoff–Love plate with a crack,” *J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys.*, **14**, No. 1, 28–41 (2021).
23. *Furtsev A., Itou H., and Rudoy E.*, “Modeling of bonded elastic structures by a variational method: Theoretical analysis and numerical simulation,” *Int. J. Solids Struct.*, **182–183**, 100–111 (2020).
24. *Shcherbakov V.*, “Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **67**, No. 3, 71 (2016).
25. *Khudnev A. and Negri A.*, “Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **64**, No. 1, 179–191 (2013).
26. *Itou H. and Khudnev A. M.*, “On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies,” *Math. Methods Appl. Sci.*, **39**, No. 17, 4980–4993 (2016).
27. *Khudnev A. M.*, “Shape control of thin rigid inclusions and cracks in elastic bodies,” *Arch. Appl. Mech.*, **83**, No. 10, 1493–1509 (2013).
28. *Rudoy E. M. and Shcherbakov V. V.*, “Domain decomposition method for a membrane with a delaminated thin rigid inclusion,” *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **13**, No. 1, 395–410 (2016).
29. *Lazarev N. P.*, “Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack,” *Z. Angew. Math. Mech.*, **96**, No. 4, 509–518 (2016).
30. *Khudnev A. M., Novotny A. A., Sokołowski J., and Zochowski A.*, “Shape and topology sensitivity analysis for cracks in elastic bodies on boundaries of rigid inclusions,” *J. Mech. Phys. Solids*, **57**, No. 10, 1718–1732 (2009).
31. *Lazarev N. P. and Rudoy E. M.*, “Optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic plate on the outer edge,” *Z. Angew. Math. Mech.*, **97**, No. 9, 1120–1127 (2017).
32. *Lazarev N. and Itou H.*, “Optimal location of a rigid inclusion in equilibrium problems for

- inhomogeneous Kirchhoff-Love plates with a crack," *Math. Mech. Solids*, **24**, No. 12, 3743–3752 (2019).
- 33.** *Doktor P.*, "Approximation of domains with Lipschitzian boundary," *Čas. Pěstování Mat.*, **101**, 237–255 (1976).
- 34.** *Baiocchi C. and Capelo A.*, *Variational and Quasi-Variational Inequalities*, Wiley, New York (1984).
- 35.** *Hlavaček I., Haslinger J., Nečas J., and Lovíšek J.*, *Solution of Variational Inequalities in Mechanics*, Springer-Verl., New York (1988).
- 36.** *Rudoy E. and Shcherbakov V.*, "First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks," *Appl. Math. Optim.* (2020).

Submitted March 12, 2021

Revised May 19, 2021

Accepted May 26, 2021

Nyurgun P. Lazarev
North-Eastern Federal University,
48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677000, Russia
nyurgun@ngs.ru

Evgenii F. Sharin
North-Eastern Federal University,
48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677000, Russia
ef.sharin@s-vfu.ru

Galina M. Semenova
North-Eastern Federal University,
Yakutsk Branch of the Regional Scientific and Educational Mathematical Center
"Far Eastern Center of Mathematical Research,"
48 Kulakovskiy Street, Yakutsk 677000, Russia
sgm.08@yandex.ru