

УДК 539.375

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
УГЛОМ НАКЛОНА ТРЕЩИНЫ
В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ
ТИМОШЕНКО С УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Н. В. Неустроева, Н. П. Лазарев

Аннотация. Математическое моделирование и исследование задач о деформировании неоднородных тел, содержащих трещины вдоль упругих включений, предполагает задание условий сопряжения на границе стыка разных материалов. Трудности связаны с возможностью появления больших значений напряжений вблизи включений. Определение неоднородных тел с наиболее оптимальными параметрами представляет собой одно из самых востребованных направлений теоретических и экспериментальных исследований. В данной работе исследована задача оптимального управления углом наклона трещины к срединной плоскости в задаче о равновесии упругой пластины Тимошенко, содержащей наклонную трещину на границе упругого включения. Сложность задачи заключается в том, что на берегах трещины существует условие непроникания, имеющее вид неравенства. Функционал качества характеризует отклонение от заданных перемещений. Доказана разрешимость задачи оптимального управления. Установлена непрерывная зависимость решений от значения угла наклона трещины.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.71.81.005

Ключевые слова: наклонная трещина, упругое включение, пластина, оптимальное управление, модель Тимошенко.

Проблемы оптимизации форм и структуры упругих конструкций, содержащих включения и трещины (разрезы) привлекают большой интерес как с прикладной стороны, так и с теоретической. Классический подход к описанию трещин, возникающих между упругой областью и включением, заключается в задании на берегах трещины линейных краевых условий. Хорошо известно, что получаемые для таких линейных моделей решения краевых задач обладают недостатком, противоположные берега трещины могут проникать друг в друга [1, 2]. Интерес представляют задачи о равновесии упругих тел с включениями и трещинами с нелинейными краевыми условиями [1, 3–10]. В работе исследуется задача, в которой учитывается условие непроникания при отыскании оптимальной формы упругого тела. Соответствующие задачи формулируются в виде проблем управления для краевых задач с неизвестными границами.

Работа выполнена при поддержке Мегагранта Правительства Российской Федерации 14.Y26.31.0013, гранта РФФИ и Республики Саха (Якутия) (проект № 18-41-140003).

© 2021 Неустроева Н. В., Лазарев Н. П.

В постановках задач оптимального управления главным моментом является выбор модели, управляющих функций или параметров, выбор функционала качества, подлежащего оптимизации, и системы ограничений, накладываемых на управляющие переменные, функции состояния и рассматриваемые функционалы. Задачами оптимального управления для упругих тел при наличии ограничений на множество решений можно ознакомиться в работах [11–20]. Управляющие функции задаются с помощью физических или геометрических параметров, характеризующих внешние нагрузки, форму трещин, коэффициенты упругости, форму и размер включений и т. д. Например, в работе [17] параметром управления является угол наклона плоской трещины. В статье исследована зависимость производной функционала энергии от угла наклона плоской трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко. В работе [19] рассматривается задача управления по нахождению наиболее оптимальных форм жестких включений в упругих пластинах с трещинами с точки зрения критерия разрушения Гриффитса. Классические задачи оптимизации форм упругих тел можно найти в [21, 22].

В настоящей работе исследуется задача о равновесии композитной пластины, содержащей сквозную трещину на границе упругого включения с бесконечной жесткостью поперечного сдвига. Геометрия взаимного расположения матрицы и упругого включения определяется поверхностью, проходящей через замкнутый контур в срединной плоскости пластины. Нормаль к поверхности трещины образует малый угол со срединной плоскостью пластины. При этом деформирование матрицы описывается с помощью модели Тимошенко, упругого включения — моделью Кирхгофа — Лява. На внешней границе пластины ставятся условия жесткого защемления, на кривой задающей трещину — условия взаимного непроникания берегов. Параметр управления задается с помощью угла наклона трещины к срединной плоскости (в исходном состоянии), а функционал качества характеризует отклонение от заданных перемещений. Задача оптимального управления сводится к решению вариационной задачи с неизвестной границей. Доказывается разрешимость задачи оптимального управления.

Математическое моделирование задач о деформировании неоднородных тел, содержащих трещины вдоль включений, предполагает задание условий сопряжения на границе раздела различных двух сред [23]. Данную задачу можно также отнести к задачам сопряжения. Условия непроникания для пластин Кирхгофа — Лява, Тимошенко с наклонной трещиной предложены и исследованы в [24–27].

1. Постановка задачи. Рассмотрим ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Подобласть ω находится строго внутри Ω , т. е. $\bar{\omega} \cap \partial\Omega = \emptyset$. Границу подобласти ω обозначим через Σ , которая является достаточно гладкой. Кривая Σ состоит из двух частей γ и $\Sigma \setminus \gamma$, причем $\text{meas}(\Sigma \setminus \gamma) > 0$. Соответственно γ лежит на границе подобласти ω . Выберем внешнюю единичную нормаль $n = n(x) = (n_1, n_2)$ к $\partial\Omega$, а нормаль $\nu = \nu(x) = (\nu_1, \nu_2)$ — к кривой γ , $x = (x_1, x_2) \in \gamma$.

Предположим, что пластина, содержащая наклонную трещину на границе упругого включения, в исходном недеформируемом состоянии задается в трех-

мерном пространстве \mathbb{R}^3 множеством $\Omega \times [-h, h] \setminus \bar{\Gamma}_1$, где $\Gamma_1 \subset \Xi$. Упругое включение (до нагружения) задаем с помощью объемного тела, ограниченного плоскостями $z = h$, $z = -h$ и поверхностью

$$\Xi = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, z) \mid \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \tilde{x} = x - z\nu \operatorname{tg} \alpha(x), x \in \Sigma\},$$

где $\alpha(x) \in C^1(\Sigma)$, $|\alpha(x)| < \pi/2$. Будем считать, что толщина пластины равна $2h$. Единичную нормаль к поверхности Ξ в точке (x, z) обозначим через $\bar{n}(x, z)$. Обозначим через $\hat{\alpha}(x, z)$ угол между $\bar{n}(x, z)$ и срединной плоскостью Ω . Поверхность Γ_1 будет описывать наклонную трещину нулевой ширины:

$$\Gamma_1 = \{(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, z) \mid |z| \leq h, \tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2), \tilde{x} = x - z\nu \operatorname{tg} \alpha(x), x \in \gamma\}.$$

Пусть единичный вектор $(\nu_1(x), \nu_2(x), 0)$ совпадает по направлению с проекцией $\bar{n}(x, 0)$ на плоскость $\{x_1, x_2\}$. Тогда $\bar{n}(x, 0) = (\nu(x) \cos \hat{\alpha}(x, 0), \sin \hat{\alpha}(x, 0))$. Пусть Π_x – вертикальная плоскость, проходящая через точку $x \in \Sigma$ в направлении $\bar{n}(x, 0)$, и C_x – отрезок, полученный в пересечении Π_x и Γ_1 . Будем считать, что в точках C_x , $x \in \Sigma$, нормаль $\bar{n}(\tilde{x}, z)$ к поверхности Ξ не меняется, т. е. $\bar{n}(\tilde{x}, z) = \bar{n}(x, 0) \equiv \bar{n}(x)$, $\alpha(\tilde{x}, z) = \hat{\alpha}(x, 0) \equiv \alpha(x) \forall \tilde{x} = x - z\nu(x) \operatorname{tg} \alpha(x)$, $|z| \leq h$ (рис. 1).

Подобласть ω будет соответствовать части пластины, описываемой моделью Кирхгофа – Лява, а $\Omega \setminus \bar{\omega}$ – моделью Тимошенко для трансверсально-изотропного материала. Кривая γ задает трещину, расположенную на границе включения. В срединной плоскости $z = 0$ имеем область $\Omega_\gamma = \Omega \setminus \bar{\gamma}$. В случае $\alpha(x) \equiv 0$ получим постановку задачи, исследованную в [28].

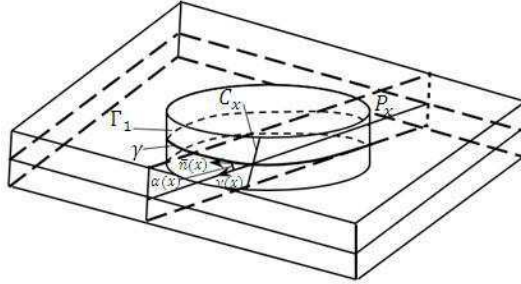


Рис. 1. Пластина с наклонной трещиной на границе упругого включения.

Пусть $\chi = \chi(x) = (W, w)$ – вектор перемещений точек срединной поверхности, $x = (x_1, x_2)$, где $W = (w^1, w^2)$ и w – горизонтальные и вертикальные перемещения точек пластины соответственно, $x \in \Omega_\gamma$; $\phi = \phi(x) = (\phi^1, \phi^2)$ – углы поворота нормальных сечений, $x \in \Omega_\gamma$. Скачок функции v на Σ обозначим через $[v] = v^+ - v^-$.

Приведем тензоры, описывающие деформацию трансверсально-изотропной пластины $\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{,j}^i + w_{,i}^j)$, $\varepsilon_{ij}(\phi) = \frac{1}{2}(\phi_{,j}^i + \phi_{,i}^j)$, $i, j = 1, 2$, где нижние индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей координате. Тензоры моментов и напряжений вычисляются по формулам

$$m_{ij} = b_{ijkl} \varepsilon_{kl}(\phi), \quad \sigma_{ij}(W) = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}(W), \quad i, j, k, l = 1, 2, \quad (1)$$

где $A = \{a_{ijkl}\}$, $B = \{b_{ijkl}\}$ — тензоры модулей упругости, удовлетворяющие условиям симметрии и положительной определенности: $a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij}$, $a_{ijkl} = \text{const}$, $i, j, k, l = 1, 2$, $a_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geq C_0\xi_{ij}\xi_{ij} \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}$, $C_0 > 0$. Аналогичные условия справедливы и для $B = \{b_{ijkl}\}$. Здесь и далее по повторяющимся индексам проводится суммирование. В силу предположений о трансверсальной изотропности материала матрицы пластины в области $\Omega \setminus \bar{\omega}$ ненулевые коэффициенты тензоров A и B определяются соотношениями

$$b_{iii} = D, \quad b_{iij} = D\kappa, \quad b_{ijj} = b_{jji} = D(1 - \kappa)/2, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2,$$

$$a_{ijkl} = 3b_{ijkl}, \quad i, j, k, l = 1, 2,$$

где D — цилиндрическая жесткость, $0 < \kappa < 1/2$ — коэффициент Пуассона [29]. Поперечные силы, действующие в области пластины, описываемые моделью Тимошенко, задаются выражениями

$$q_i(w, \phi) = \Lambda(w_{,i} + \phi^i) \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad i = 1, 2,$$

где $\Lambda = 2\kappa^2 G$; κ^2 — коэффициент сдвига, G — модуль сдвига на площадках, перпендикулярных срединной плоскости пластины; $\kappa^2, G = \text{const}$.

Гипотеза прямых нормалей Кирхгофа — Лява эквивалентна допущению, что жесткость на сдвиг в нормальных к срединной плоскости сечениях равна бесконечности. Считая параметр жесткости поперечного сдвига равной бесконечности на ω , задаем отсутствие сдвигов в нормальных к срединной поверхности пластины плоскостях. Следовательно, в области ω выполнены равенства

$$w_{,i} + \phi^i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1) для m_{ij} , $i, j = 1, 2$, получим тензор моментов в упругом включении (в модели Кирхгофа — Лява)

$$m_{ij} = -b_{ijkl}w_{,kl} \quad \text{в } \omega, \quad i, j, k, l = 1, 2.$$

Для напряжений и деформаций в ω будут справедливы соотношения

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w_{,j}^i + w_{,i}^j), \quad \sigma_{ij}(W) = a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad i, j, k, l = 1, 2.$$

Пусть $H^{1,0}(\Omega_\gamma)$ — подпространство пространства Соболева $H^1(\Omega_\gamma)$, состоящее из всех функций, которые обращаются в нуль на внешней границе $\partial\Omega$. Обозначим $H(\Omega_\gamma) = H^{1,0}(\Omega_\gamma)^5$, где норма вводится стандартным образом: $\|\cdot\|_{H(\Omega_\gamma)} = \|\cdot\|_{H^{1,0}(\Omega_\gamma)^5}$.

Сформулируем вариационную постановку задачи. Рассмотрим функционал энергии пластины

$$\begin{aligned} \Pi(\Omega; \xi) &= \frac{1}{2}b_\omega(\chi, \chi) - \int_\omega (f_i w^i + f_3 w) dx \\ &+ \frac{1}{2}B_{\Omega \setminus \bar{\omega}}(\xi, \xi) - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (f_i w^i + f_3 w + \mu_i \phi^i) dx, \quad \chi = (W, w), \quad \xi = (\chi, \phi), \end{aligned} \quad (3)$$

где билинейные формы $b_\omega(\cdot, \cdot)$ и $B_{\Omega \setminus \bar{\omega}}(\cdot, \cdot)$ для достаточно гладких функций $\xi = (\chi, \phi)$, $\chi = (W, w)$, $\bar{\xi} = (\bar{\chi}, \bar{\phi})$, $\bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w})$ определяются равенствами

$$b_\omega(\chi, \bar{\chi}) = \int_{\omega} (b_{ijkl} w_{,kl} \bar{w}_{,ij} + \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W})) dx,$$

$$B_{\Omega \setminus \bar{\omega}}(\xi, \bar{\xi}) = \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} (m_{ij}(\phi) \varepsilon_{ij}(\bar{\phi}) + \Lambda(w_{,i} + \phi^i)(\bar{w}_{,i} + \bar{\phi}^i) + \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W})) dx.$$

Используя условие (2), функционал (3) представим в виде

$$\Pi(\Omega_\gamma; \xi) = \frac{1}{2} B_{\Omega_\gamma}(\xi, \xi) - \int_{\Omega_\gamma} f \chi dx - \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \mu_i \phi^i dx, \quad \xi = (\chi, \phi),$$

где

$$B_{\Omega_\gamma}(\xi, \bar{\xi}) = \int_{\Omega_\gamma} (m_{ij}(\phi) \varepsilon_{ij}(\bar{\phi}) + \Lambda(w_{,i} + \phi^i)(\bar{w}_{,i} + \bar{\phi}^i) + \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(\bar{W})) dx.$$

Справедливы следующие неравенства [30] для некоторых положительных постоянных C_1, C_2, δ , не зависящих от ξ :

$$\int_{\Omega_\gamma} \sigma_{ij}(W) \varepsilon_{ij}(W) dx \geq C_1 \|W\|_{H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2}^2, \quad \int_{\Omega_\gamma} m_{ij}(\phi) \varepsilon_{ij}(\phi) dx \geq C_2 \|\phi\|_{H^{1,0}(\Omega_\gamma)^2}^2;$$

$$\int_{\Omega_\gamma} \Lambda(w_{,i} + \phi_i)(w_{,i} + \phi_i) dx$$

$$\geq \Lambda \left(\|\phi\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 - \delta \|\phi\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 - \frac{1}{\delta} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 \right)$$

$$= \Lambda \left((1 - \delta) \|\phi\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 + \left(1 - \frac{1}{\delta}\right) \|\nabla w\|_{L^2(\Omega_\gamma)^2}^2 \right). \quad (5)$$

На основании вышеуказанных неравенств можно сделать вывод об эквивалентности в $H(\Omega_\gamma)$ стандартной нормы и нормы, введенной с помощью выражения $\{B_{\Omega_\gamma}(\xi, \xi)\}^{\frac{1}{2}}$.

При определении множества допустимых перемещений K_α используем условие непроникания противоположных берегов сквозной трещины

$$[W_\nu] + [w] \operatorname{tg} \alpha \geq h |\phi_\nu|, \quad x \in \gamma, \quad W_\nu = w^i \nu_i, \quad \phi_\nu = \phi^i \nu_i. \quad (6)$$

Множество допустимых перемещений K_α определяется следующим образом:

$$K_\alpha = \{ \xi = (\chi, \phi) \in H(\Omega_\gamma) \mid w_{,i} + \phi^i = 0 \text{ в } \omega, \quad i = 1, 2, \\ [W_\nu] + [w] \operatorname{tg} \alpha \geq h |\phi_\nu| \text{ на } \gamma \}.$$

Заметим, что поскольку решение $\xi = (\chi, \phi)$ принадлежит пространству $H(\Omega_\gamma)$, на границе раздела двух сред без ослоения $\Sigma \setminus \bar{\gamma}$ будет выполняться условие склейки

$$[\xi] = (0, 0, 0, 0, 0).$$

Сформулируем задачу равновесия в виде минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений K_α :

$$\inf_{\xi_\alpha \in K_\alpha} \Pi(\Omega_\gamma; \xi_\alpha). \quad (7)$$

Задача (7) имеет единственное решение ξ_α и эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$\begin{aligned} \xi_\alpha = (\chi_\alpha, \phi_\alpha) \in K_\alpha, \quad B_{\Omega_\gamma}(\xi_\alpha, \bar{\xi} - \xi_\alpha) \geq \int_{\Omega_\gamma} f(\bar{\chi} - \chi_\alpha) dx \\ + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \mu(\bar{\phi} - \phi_\alpha) dx \quad \forall \bar{\xi} = (\bar{\chi}, \bar{\phi}) \in K_\alpha. \quad (8) \end{aligned}$$

При условии достаточной гладкости решения вариационного неравенства (8) с помощью подходящего выбора пробных функций можно вывести дифференциальную постановку задачи (7). При этом вариационная и дифференциальная постановки задачи будут эквивалентны.

Требуется найти функцию $\xi = (W, w, \phi)$ такую, что

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j} &= -f_i \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_{ij}(W) &= a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad i, j = 1, 2, \\ q_{i,i} &= -f_3 \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \\ m_{ij,j} - q_i &= -\mu_i, \quad \text{в } \Omega \setminus \bar{\omega}, \quad i = 1, 2, \\ -m_{ij,ij} &= f_3 \quad \text{в } \omega, \\ m_{ij} &= b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\phi) \quad \text{в } \omega, \\ \sigma_{ij,j} &= -f_i \quad \text{в } \omega, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_{ij}(W) &= a_{ijkl}\varepsilon_{kl}(W), \quad \text{в } \omega, \quad i, j = 1, 2, \\ w_{,i} + \phi^i &= 0, \quad \text{на } \omega, \quad i = 1, 2, \\ \xi &= (0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{на } \partial\Omega, \\ [\xi] &= (0, 0, 0, 0, 0) \quad \text{на } \Sigma \setminus \bar{\gamma}, \\ [t_\nu] &= [m_\nu] = [\sigma_\tau] = [\sigma_\nu] = 0 \quad \text{на } \Sigma, \\ t_\nu &= \sigma_\tau = m_\tau^+ = 0, \quad |m_\nu| \leq -h\sigma_\nu \quad \text{на } \gamma, \\ [W_\nu] + [w] \operatorname{tg} \alpha &\geq h|\phi_\nu| \quad \text{на } \gamma, \\ (-h\sigma_\nu - m_\nu)([W_\nu] + [w] \operatorname{tg} \alpha + h|\phi_\nu|) &= 0, \quad \text{на } \gamma, \\ (-h\sigma_\nu + m_\nu)([W_\nu] + [w] \operatorname{tg} \alpha - h|\phi_\nu|) &= 0 \quad \text{на } \gamma, \end{aligned}$$

где $f = (f_1, f_2, f_3) \in [C^1(\bar{\Omega})]^3$ и $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in [C^1(\bar{\Omega} \setminus \omega)]^2$ — векторы, задающие внешние нагрузки; число α задает величину угла наклона трещины, $\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i$, $\sigma_\tau = \sigma_{ij}\nu_j\tau_i$, $m_\nu = m_{ij}\nu_j\nu_i$, $m_\tau^+ = m_{ij}\nu_j\tau_i$, $t_\nu^+ = \Lambda\left(\frac{\partial w^+}{\partial \nu}\right) + \frac{\partial m_\tau^+}{\partial \tau}$, $t_\nu^- = m_{ij,k}\tau_k\tau_j\nu_i + m_{ij,j}\nu_i$, $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$.

2. Задача оптимального управления. В рамках этого пункта будем считать, что угол наклона трещины считается постоянным, т. е. функция $\alpha(x)$, $x \in \gamma$, не зависит от $x \in \gamma$. Задача оптимального управления углом наклона трещины к срединной плоскости пластины состоит в том, чтобы среди множества чисел углов наклона трещины $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ выбрать такой угол, при котором отклонение решения задачи (7) от заданной функции ξ^* является наименьшим. Другими словами, требуется найти число $\alpha^* \in [-\alpha_0, \alpha_0]$:

$$J(\alpha^*, \xi_{\alpha^*}) = \inf_{\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]} J(\alpha, \xi_\alpha), \quad (9)$$

где $J(\alpha, \xi_\alpha) = \|\xi_\alpha - \xi^*\|_{H(\Omega_\gamma)}$ — функционал качества.

Теорема. *Задача оптимального управления (11) имеет решение.*

Доказательство. Пусть $\{\alpha_n\}$ — минимизирующая последовательность в задаче (9). В силу ограниченности интервала $[-\alpha_0, \alpha_0]$ из $\{\alpha_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность (с прежним обозначением) $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$, где α^* некоторое число из промежутка $[-\alpha_0, \alpha_0]$. В соответствии с утверждением ниже доказанной леммы можно выделить подпоследовательность такую, что $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$ при $n \rightarrow \infty$, и для которой $\xi_{\alpha_n} \rightarrow \xi_{\alpha^*}$ при $n \rightarrow \infty$ сильно в пространстве $H(\Omega_\gamma)$. Для этой последовательности в силу сильной сходимости справедливо соотношение

$$J(\alpha_n, \xi_{\alpha_n}) \rightarrow J(\alpha^*, \xi_{\alpha^*}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что α^* — решение задачи оптимального управления (9). Теорема доказана.

Лемма. *Пусть $\alpha^* \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ — фиксированное число, $\xi_\alpha, \xi_{\alpha^*}$ — решения задачи (7), соответствующие параметрам $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ и α^* . Тогда из последовательности ξ_α можно выделить подпоследовательность ξ_{α_n} , для которой*

$$\xi_{\alpha_n} \rightarrow \xi_{\alpha^*} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

сильно в пространстве $H(\Omega_\gamma)$.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть существуют число $\epsilon > 0$ и последовательность $\{\alpha_n\}$ такие, что

$$\alpha_n \rightarrow \alpha^*, \quad \alpha_n \in [-\alpha_0, \alpha_0], \quad \|\xi_{\alpha_n} - \xi_{\alpha^*}\|_{H(\Omega_\gamma)} > \epsilon \quad \forall n \in N.$$

Для любого фиксированного $\alpha \in [-\alpha_0, \alpha_0]$ имеет место соотношение

$$B_{\Omega_\gamma}(\xi_\alpha, \xi_\alpha) = \int_{\Omega_\gamma} f \chi_\alpha dx + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \mu \phi_\alpha dx.$$

В силу неравенств (4), (5) выводим равномерную по α оценку

$$\|\xi_\alpha\|_{H(\Omega_\gamma)} \leq C$$

с постоянной $C > 0$, не зависящей от α . Значит, из последовательности $\{\xi_{\alpha_n}\}$ можно выделить подпоследовательность с прежним обозначением, для которой соответствующая подпоследовательность функций $\{\xi_{\alpha_n}\}$ слабо сходится к некоторой функции $\tilde{\xi}$ в $H(\Omega_\gamma)$ при $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$.

Докажем, что $\tilde{\xi} \in K_{\alpha^*}$. В силу слабой сходимости $\{\xi_{\alpha_n}\}$ к функции $\tilde{\xi}$ в $H(\Omega_\gamma)$ по теореме вложения для пространства Соболева имеем сильную сходимость

$$\xi_{\alpha_n} \rightarrow \tilde{\xi} \text{ в } L_2(\gamma)^5, \quad w_{\alpha_n, i} \rightarrow \tilde{w}_{,i} \text{ в } L_2(\omega) \text{ при } \alpha_n \rightarrow \alpha^*, \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Покажем, что $\tilde{\xi} = (\tilde{\chi}, \tilde{\phi})$, $\chi = (\tilde{W}, \tilde{w})$ удовлетворяет неравенству $[\tilde{W}_\nu] + [\tilde{w}] \operatorname{tg} \alpha \geq h|[\tilde{\phi}_\nu]|$, $x \in \gamma$ на γ и соотношению $\tilde{w}_{,i} + \tilde{\phi}^i = 0$ в ω , $i = 1, 2$. В силу сходимости (10) можно извлечь еще раз подпоследовательности и считать, что $\xi_{\alpha_n} \rightarrow \tilde{\xi}$ и $w_{\alpha_n, i} \rightarrow \tilde{w}_{,i}$ п.в. на γ при $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$. Переходя к пределу в неравенствах

$$[W_{\alpha_n \nu}] + [w_{\alpha_n}] \operatorname{tg} \alpha_n \geq h|[\phi_{\alpha_n \nu}]| \quad \text{п.в. на } \gamma$$

и соотношениях

$$w_{\alpha_n, i} + \phi_{\alpha_n}^i = 0 \text{ в } \omega, \quad i = 1, 2$$

при $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$, имеем

$$[\tilde{W}_\nu] + [\tilde{w}] \operatorname{tg} \alpha^* \geq h|[\tilde{\phi}_\nu]| \quad \text{п.в. на } \gamma,$$

$$\tilde{w}_{,i} + \tilde{\phi}^i = 0 \text{ в } \omega, \quad i = 1, 2.$$

Это означает, что $\tilde{\xi} \in K_{\alpha^*}$.

Целью последующих рассуждений является доказательство справедливости равенства $\tilde{\xi} = \xi_{\alpha^*}$ и существования сильно сходящейся к ξ_{α^*} в пространстве $H(\Omega_\gamma)$ последовательности решений $\xi_n = \xi_{\alpha_n}$, $n = 1, 2$.

Построим для любой пробной функции $\eta \in K_{\alpha^*}$ последовательность $\{\eta_\alpha\}$: $\eta_\alpha \in K_\alpha$ и $\eta_\alpha \rightarrow \eta_{\alpha^*}$ сильно в пространстве $H(\Omega_\gamma)$ при $\alpha \rightarrow \alpha^*$. Продолжим $\nu_1(x)$, $\nu_2(x)$, определенные для $x \in \gamma$, на всю область Ω гладким и финитным образом. Затем рассмотрим функции вида

$$\eta_\alpha = (w_\alpha^1, w_\alpha^2, w_\alpha, \phi_\alpha^1, \phi_\alpha^2) = \eta_{\alpha^*} + (w_{\alpha^*}(\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha)\nu_1, w_{\alpha^*}(\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha)\nu_2, 0, 0, 0).$$

Построенная функция, очевидно, принадлежит $H(\Omega_\gamma)$ и удовлетворяет необходимым свойствам. Проверим выполнение условий (2), (6). По построению имеем

$$[W_{\alpha \nu}] = [W_{\alpha^* \nu}] + [w_{\alpha^*}](\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha), \quad [w_\alpha] = [w_{\alpha^*}], \quad [\phi_{\alpha \nu}] = [\phi_{\alpha^* \nu}] \quad \text{на } \gamma.$$

В силу включения $\eta_\alpha \in K_{\alpha^*}$ справедливы неравенство и соотношение

$$[W_{\alpha^* \nu}] + [w_{\alpha^*}](\operatorname{tg} \alpha^* - \operatorname{tg} \alpha) + [w_{\alpha^*}] \operatorname{tg} \alpha \geq h|[\phi_{\alpha^* \nu}]| \quad \text{п.в. на } \gamma,$$

$$w_{\alpha^*, i} + \phi_{\alpha^*}^i = 0 \quad \text{в } \omega.$$

Следовательно, $\eta_\alpha \in K_{\alpha^*}$. Кроме того, очевидно, что при $\alpha \rightarrow \alpha^*$ функции $\eta_\alpha \rightarrow \eta_{\alpha^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$.

Указанная сильная сходимость позволяет перейти к пределу при $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$ в следующих неравенствах с тестовой функцией $\eta_\alpha \in K_{\alpha^*}$:

$$\xi_{\alpha_n} \in K_{\alpha_n}, \quad B_{\Omega_\gamma}(\xi_{\alpha_n}, \eta_\alpha - \xi_{\alpha_n}) \geq \int_{\Omega_\gamma} f(\chi_\alpha - \chi_{\alpha_n}) dx + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \mu(\phi_\alpha - \phi_{\alpha_n}) dx.$$

В силу слабой сходимости ξ_{α_n} к $\tilde{\xi}$ при $\alpha_n \rightarrow \alpha^*$ в $H(\Omega_\gamma)$ предельное неравенство примет вид

$$B_{\Omega_\gamma}(\tilde{\xi}, \eta_\alpha - \tilde{\xi}) \geq \int_{\Omega_\gamma} f(\chi_\alpha - \tilde{\chi}) dx + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \mu(\phi_\alpha - \tilde{\phi}) dx \quad \forall \eta_\alpha = (\chi_\alpha, \phi_\alpha) \in K_{\alpha^*}. \quad (11)$$

Принимая во внимание единственность разрешимости задачи (11), получим $\tilde{\xi} = \xi_{\alpha^*}$.

Установим сильную сходимость $\xi_{\alpha_n} \rightarrow \xi_{\alpha^*}$. Ввиду сходимости $\xi_{\alpha_n} \rightarrow \xi_{\alpha^*}$ слабо в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} B_{\Omega_\gamma}(\xi_{\alpha_n}, \xi_{\alpha_n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\gamma} f \chi_{\alpha_n} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \mu \phi_{\alpha_n} dx \\ &= \int_{\Omega_\gamma} f \chi_{\alpha^*} dx + \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \mu \phi_{\alpha^*} dx = B_{\Omega_\gamma}(\xi_{\alpha^*}, \xi_{\alpha^*}). \end{aligned}$$

Ввиду эквивалентности стандартной нормы и нормы, введенной с помощью $\{B_{\Omega_\gamma}(\xi, \xi)\}^{\frac{1}{2}}$ в пространстве $H(\Omega_\gamma)$, последнее равенство означает, что $\xi_{\alpha_n} \rightarrow \xi_{\alpha^*}$ сильно в $H(\Omega_\gamma)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, пришли к противоречию с исходным предположением $\|\xi_{\alpha_n} - \xi_{\alpha^*}\| \geq \epsilon$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Это означает, что для любой последовательности $\alpha_n \in [-\alpha_0, \alpha_0]$, сходящейся к α^* , выполняется

$$\|\xi_{\alpha_n} - \xi_{\alpha^*}\|_{H(\Omega_\gamma)} \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha_n \rightarrow \alpha^*.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Хлуднев А. М. Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.
2. *Khudnev A. M., Kovtunenkov V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.
3. *Lazarev N., Semenova G.* An optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic two-dimensional body on the outer edge // J. Optim. Theory Appl. 2018. V. 178, N. 2. P. 614–626.
4. *Khudnev A. M.* On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter // Math. Mech. Solids. 2019. V. 24, N. 9. P. 2742–2753.
5. *Khudnev A., Popova T.* Equilibrium problem for elastic body with delaminated T-shape inclusion // J. Comput. Appl. Math. 2020. V. 376. P. 112870.
6. *Rudoy E., Shcherbakov V.* First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks // Appl. Math. Optimization. 2021. V. 84, N 3. P. 2775–2802.
7. *Khudnev A., Fankina I.* Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary // Z. Angew. Math. Phys. 2021. Bd 72, Heft 3. S. 121.
8. *Khudnev A., Esposito A. C., Faella L.* Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions // J. Optimization Theory Appl. 2020. V. 184, N 1. P. 293–314.
9. *Khudnev A.* T-shape inclusion in elastic body with a damage parameter // J. Comput. Appl. Math. 2021. V. 393. P. 113540.
10. *Lazarev N., Rudoy E.* Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies // J. Comput. Appl. Math. 2022. V. 403. P. 113710.
11. *Khudnev A. M., Sokolowski J.* Modelling and control in solid mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser-Verl., 1997.
12. *Вторушин Е. В.* Управление формой трещины в упругом теле при условии возможного контакта берегов // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 2. С. 20–30.
13. *Khudnev A. M., Leugering G. R.* Optimal control of crack in elastic bodies with thin rigid inclusions // Z. Angew. Math. Mech. 2011. Bd 91, Heft 2. S. 125–137.

14. Лазарев Н. П. Существование экстремальной формы трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 49–62.
15. Khludnev A. M., Negri M. Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2013. Bd 64, Heft 1. S. 179–191.
16. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину вдоль тонкого жесткого включения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 1. С. 32–45.
17. Лазарев Н. П., Неустроева Н. В., Николаева Н. А. Оптимальное управление углом наклона трещины в задаче о равновесии пластины Тимошенко // Сиб. электрон. мат. изв. 2015. Т. 12. С. 300–308.
18. Lazarev N. P. Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack // Z. Angew. Mech. 2016. Bd 96, Heft 4. S. 509–518.
19. Shcherbakov V. Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2016. Bd 67, Heft 3. S. 71.
20. Kovtunen V. A., Leugering G. A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model // SIAM. J. Control Optim. 2016. V. 54, N 3. P. 1329–1351.
21. Баничук Н. В. Оптимизация форм упругих тел. М.: Наука, 1980.
22. Литвинов В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987.
23. Khludnev A. M., Faella L., Popova T. S. Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies // Math. Mech. Solids. 2017. V. 22, N 4. P. 1–14.
24. Хлуднев А. М. Задача о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину // Прикл. механика и техн. физика. 1997. Т. 38, № 5. С. 117–121.
25. Ковтуненко В. А., Леонтьев А. Н., Хлуднев А. М. Задача о равновесии пластины с наклонным разрезом // Прикл. механика и техн. физика. 1998. Т. 39, № 2. С. 164–174.
26. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко с наклонной трещиной // Прикл. механика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 4. С. 171–181.
27. Неустроева Н. В. Задача о равновесии упругой пластины, содержащей наклонную трещину на границе жесткого включения // Сиб. журн. индустр. математики. 2015. Т. 18, № 2. С. 74–84.
28. Лазарев Н. П. Задача о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину на границе упругого включения с бесконечной жесткостью поперечного сдвига // Прикл. математика и техн. физика. 2013. Т. 54, № 2. С. 179–189.
29. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. К.: Наук. думка, 1973.
30. Лазарев Н. П. Дифференцирование функционала энергии в задаче о равновесии пластины Тимошенко, содержащей трещину // Прикл. математика и техн. физика. 2012. Т. 53, № 2. С. 175–185.

Поступила в редакцию 7 августа 2021 г.

После доработки 7 октября 2021 г.

Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Неустроева Наталья Валериановна
Северо-Восточный федеральный университет,
Институт математики и информатики,
Кулаковского, 48, Якутск 677000
nnataliav@mail.ru,

Лазарев Нюргун Петрович
Северо-Восточный федеральный университет,
Научно-исследовательский институт математики,
Белинского, 58, Якутск 677891
nyurgun@ngs.ru

OPTIMAL CONTROL OF THE CRACK
ANGLE IN THE EQUILIBRIUM
PROBLEM FOR A TIMOSHENKO
PLATE WITH ELASTIC INCLUSION

N. V. Neustroeva and N. P. Lazarev

Abstract: Mathematical modeling and research of problems on the deformation of inhomogeneous bodies containing cracks along elastic inclusions involves setting the conjugation conditions at the interface between different materials. Difficulties are associated with the possibility of large stress values appearing near the inclusions. Determining the inhomogeneous bodies with the most optimal parameters is one of the most popular areas of theoretical and experimental research. In this paper, we study the problem of optimal control of the angle of the crack inclination to the median plane in the equilibrium problem for an elastic Timoshenko plate containing an oblique crack at the boundary of an elastic inclusion. The complexity of the problem is due to the fact that the non-penetration condition on the crack faces is given in the form of inequality. The quality functional characterizes the deviation from the specified displacements. We prove solvability of the optimal control problem and establish continuous dependence of the solutions on the value of the crack inclination angle.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.71.81.005

Keywords: inclined crack, elastic inclusion, optimal control, plate, Timoshenko model.

REFERENCES

1. *Khudnev A. M.*, Elasticity Problems in Nonsmooth Domains [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).
2. *Khudnev A. M. and Kovtunenkov V. A.*, Analysis of Cracks in Solids, WIT Press, Southampton; Boston (2000).
3. *Lazarev N. and Semenova G.*, “An optimal size of a rigid thin stiffener reinforcing an elastic two-dimensional body on the outer edge,” *J. Optim. Theory Appl.*, **178**, 2, 614–626 (2018).
4. *Khudnev A. M.*, “On modeling thin inclusions in elastic bodies with a damage parameter,” *Math. Mech. Solids*, **24**, No. 9, 2742–2753 (2019).
5. *Khudnev A. and Popova T.*, “Equilibrium problem for elastic body with delaminated *T*-shape inclusion,” *J. Comput. Appl. Math.*, **376**, 112870 (2020).
6. *Rudoy E. and Shcherbakov V.*, “First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks,” *Appl. Math. Optimization*, **84**, No. 3, 2775–2802 (2021).
7. *Khudnev A. and Fankina I.*, “Equilibrium problem for elastic plate with thin rigid inclusion crossing an external boundary,” *Z. Angew. Math. Phys.*, **72**, No. 3, 121 (2021).
8. *Khudnev A., Esposito A. C., and Faella L.*, “Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions,” *J. Optimization Theory Appl.*, **184**, No. 1, 293–314 (2020).
9. *Khudnev A.*, “*T*-shape inclusion in elastic body with a damage parameter,” *J. Comput. Appl. Math.*, **393**, 113540 (2021).

10. Lazarev N. and Rudoy E., "Optimal location of a finite set of rigid inclusions in contact problems for inhomogeneous two-dimensional bodies," *J. Comput. Appl. Math.*, **403**, 113710 (2022).
11. Khludnev A. M. and Sokolowski J., *Modelling and Control in Solid Mechanics*, Birkhäuser-Verl., Basel; Boston; Berlin (1997).
12. Vtorushin E. V., "Crack shape management in the elastic body under the condition of possible contact of shores [in Russian]," *Sib. J. Ind. Math.*, **9**, No. 2, 20–30 (2006).
13. Khludnev A. M. and Leugering G. R., "Optimal control of crack in elastic bodies with thin rigid inclusions," *Z. Angew. Math. Mech.*, **91**, No. 2, 125–137 (2011).
14. Lazarev N. P., "The existence of an extreme crack form in the problem of Timoshenko plate equilibrium [in Russian]," *Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh. Inform.*, **11**, No. 4, 49–62 (2011).
15. Khludnev A. M. and Negri M., "Optimal rigid inclusion shapes in elastic bodies with cracks," *Z. Angew. Math. Phys.*, **64**, No. 1, 179–191 (2013).
16. Lazarev N. P., "Problem of the Timoshenko plate equilibrium containing a crack along the thin rigid inclusion [in Russian]," *Vestn. Udmurt. Univ., Mat. Mekh. Komp'yut. Nauki*, No. 1, 32–45 (2014).
17. Lazarev N. P., Neustroeva N. V., and Nikolaeva N. V., "Optimal control of tilt angles in equilibrium problems for the Timoshenko plate with an oblique cut," *Sib. Electron. Math. Rep.*, No. 12, 300–308 (2015).
18. Lazarev N. P., "Optimal control of the thickness of a rigid inclusion in equilibrium problems for inhomogeneous two-dimensional bodies with a crack," *Z. Angew. Math. Mech.*, **96**, No. 4, 509–518 (2016).
19. Shcherbakov V., "Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks," *Z. Angew. Math. Phys.*, **67**, No. 3, 71 (2016).
20. Kovtunenkov V. A. and Leugering G., "A shape-topological control problem for nonlinear crack-defect interaction: The antiplane variational model," *SIAM J. Control Optim.*, **54**, No. 3, 1329–1351 (2016).
21. Banichuk N. V., *Optimization of Elastic Body Forms [in Russian]*, Nauka, Moscow (1980).
22. Litvinov V. G., *Optimization in the Elliptical Boundary Problems with Applications to Mechanics [in Russian]*, Nauka, Moscow (1987).
23. Khludnev A. M., Faella L., and Popova T. S., "Junction problem for rigid and Timoshenko elastic inclusions in elastic bodies," *Math. Mech. Solids*, **22**, No. 4, 1–14 (2017).
24. Khludnev A. M., "Equilibrium problem of an elastic plate with an oblique crack," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **38**, No. 5, 757–761 (1997).
25. Kovtunenkov V. A., Leontiev A. N., and Khludnev A. M., "An equilibrium problem of a plate with an oblique cut," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **39**, No. 2, 302–311 (1998).
26. Lazarev N. P., "Problem of Timoshenko plate equilibrium with an oblique crack," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, **54**, No. 4, 662–671 (2013).
27. Neustroeva N. V., "An equilibrium problem for an elastic plate with an inclined crack on the boundary of a rigid inclusion," *Sib. Zh. Ind. Mat.*, **18**, No. 2, 74–84 (2015).
28. Lazarev N. P., "Problem of the Timoshenko plate equilibrium containing a crack on the boundary of the elastic inclusion with infinite shear stiffness," *Appl. Math. Tech. Phys.*, **54**, No. 2, 179–189 (2013).
29. Pelekh B. L., *Theory of Shells with Finite Shear Rigidity [in Russian]*, Naukova Dumka, Kiev (1973).
30. Lazarev N. P., "Differentiation of the energy functional in the equilibrium problem for a Timo-

shenko plate containing a crack,” J. Appl. Mech. Tech. Phys., **53**, No. 2, 299–307 (2012).

Submitted August 7, 2021

Revised October 7, 2021

Accepted November 26, 2021

Natalia V. Neustroeva
North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677000, Russia
nnataliav@mail.ru

Nyurgun P. Lazarev
North-Eastern Federal University,
Scientific Research Institute of Mathematics,
58 Belinsky Street, Yakutsk 677891, Russia
nyurgun@ngs.ru