Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

УДК 517.95

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЛЭКА — ШОУЛЗА

С. Г. Пятков, Д. С. Орлова

Аннотация. Рассматривается обратная задача об определении коэффициента волатильности, зависящего от пространственной переменной, по данной дополнительной информации в виде условий частичного финального переопределения. Получены теоремы существования и единственности решений задачи, построен численный алгоритм и описаны результаты численных экспериментов.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.27.57.004

Ключевые слова: уравнение Блэка — Шоулза, обратная задача, коэффициент волатильности.

Введение

Финансовая математика — это относительно новое направление в науке, активно развивающееся и представляющее особый интерес в период постоянных изменений условий мировой экономики. Теория ценообразования на рынке финансовых производных была описана в работах Блэка, Шоулза и Мертона [1]. Для любой цены акций $s \in (0, \infty)$ и времени $t \in (0, T)$ цена опциона, истекающего в момент времени T, удовлетворяет дифференциальному уравнению Блэка — Шоулза (см. [1, 2])

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}s^2\sigma^2(s,t)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + s\mu\frac{\partial u}{\partial s} - ru = 0 \quad (s > 0), \tag{1}$$

где σ — коэффициент волатильности, μ и ν — нейтральный к риску дрифт и безрисковая процентная ставка соответственно. Обычно считается, что функция u задана в точке $s = 0$, например $u(0, t) = 0$, описано поведение u при $s \to +\infty$, например $\lim\limits_{s\to\infty} u(s, t)/s = 1$, и при $t = T$ имеем $u(s, T) = (s - K)^+$ (см. это и другие условия в [3]), где K — параметр.

Обратная задача об определении решения u и коэффициента $\sigma(s)$ по некоторой дополнительной информации в [2, 3] и ряде других работ сводится вначале к обратной задаче для двойственного уравнения Блэка — Шоулза и затем после некоторых замен к задаче вида

$$\begin{gathered} Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (a(x,t) + \mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \overline{\mu}u = 0, \\ \overline{\mu} = r - \mu, \quad a(x,t) = \sigma^2(s^*e^x, T - t)/2, \quad x \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x). \tag{3}$$

$$u(T,x) = u_T(x), \quad x \in G_0 = (c,d). \tag{4}$$

В качестве функции u_0 в [2] взята функция

$$u_0 = s^*(1-e^x)^+ = s^* \max(1-e^x, 0). \tag{5}$$

Условие (4) представляет собой нестандартное условие (в том смысле, что условие задается не на всей прямой $t = T$) финального переопределения для определения коэффициента $a = a(x,t)$, который считается заданным на множестве $\mathbb{R} \setminus G_0$. Ряд результатов, посвященных теоремам единственности задачи (2)–(5) в случае $a = a(x)$, и обширная библиография представлены в работе [3]. В частности, здесь имеется и обзор численных методов решения этой обратной задачи. В основном они сводятся к сведению задачи к задаче оптимального управления и минимизации некоторого квадратичного функционала (см. также [4]). Сошлемся на недавнюю книгу [5], где могут быть найдены постановки задач, ряд теорем единственности (см. § 9.3 в [5]) и описание некоторых численных методов.

Численное решение задачи (2)–(4) рассматривается в [2, 6–9] (см. также библиографию в этих работах). В [2] при некоторых достаточно жестких условиях, которые гарантировали близость решения $\sigma(s)$ к некоторой постоянной, показана единственность решений задачи (2)–(5). Аналогичный результат и численный метод представлен в [8], где задача решается при помощи линеаризации и сводится к обратной задаче об определении правой части. В [10] уже рассматривается задача об определении функции $a(x,t)$ вида $a(x,t) = \sigma_0 + f_0(x) + t f_1(x)$, где f_i — малые возмущения. Исходная задача линеаризуется и доказывается разрешимость этой линеаризованной задачи, где неизвестные функции входят уже в правую часть. Приведен численный алгоритм, основанный на полученных результатах. В [9] задача (2)–(5), где $(c,d) = \mathbb{R}$, сводится к задаче управления с квадратичным целевым функционалом, которая затем исследуется. Показана разрешимость этой задачи управления. В работе [11] авторы рассматривают численный алгоритм определения функции $\sigma = \sigma(s)$ в (1), где условие при $t = T$ имеет вид $u(s,T) = (K-s)^+$, с использованием условия переопределения вида $u(\varphi(t),t) = \psi(t)$ и соответственно краевых условий $u(0,t) = K$, $u(L,t) = 0$ (L — достаточно большой параметр), т. е. уравнение рассматривается на достаточно большом, но конечном промежутке $[0,L]$. Работы [12, 13] посвящены обратным задачам определения σ в случае его зависимости только от времени, и приведены некоторые методы его численного определения. Задача сводится к минимизации квадратичного функционала. Аналогичные результаты получены в [14], где определяются уже две неизвестные функции $\sigma(t)$, $r(t)$. В частных случаях приведены некоторые явные представления решений обратной задачи (2)–(5). Выделим также ряд других работ, где используются другие условия переопределения. В [15, 16] рассматривается задача определения коэффициента $\sigma = \sigma(s)$ по заданному набору значений $u(s, T_i, K_{ij}) = u_{ij}$.

Для определения коэффициента σ строится подходящий квадратичный функционал и решается задача о его минимизации. При численном решении интервал $(0,\infty)$ заменяется конечным интервалом $(0,s^*)$, в граничной точке s^* которого задается подходящее условие Дирихле. Представлены результаты численных экспериментов. Сошлемся также на работы [17–20], где в том числе приводятся постановки обратных задач, в которых ищется коэффициент волатильности, зависящий от всех переменных.

Среди работ, где рассматривалась задача вида (2)–(5) с финальным определением на всей прямой $t = T$ (или на всем верхнем основании цилиндра в случае, когда область цилиндрическая), отметим классические результаты [21, 22; 4, § 1.2]. Достаточно полная библиография, касающаяся обратных задач для параболических уравнений, может быть найдена в [4, 5]. Все функциональные пространства предполагаются вещественными, если не оговорено противное.

Как показано в [23], задача (2)–(5), где $a = a(x)$, в случае $(c,d) \neq \mathbb{R}$ является переопределенной. В случае сведения задачи к операторному уравнению и нахождения его решения, например, методом последовательных приближений, мы можем получить коэффициент волатильности, не являющийся непрерывным на $\mathbb{R}$. Однако предположение о его непрерывности используется практически во всех работах, посвященных как теоретическим вопросам, так и численным методам. Кроме того, это условие необходимо, чтобы построить решение прямой задачи (2), (3). Поэтому надо строить численные методы определения коэффициента $a(x)$ с учетом этой особенности задачи. В данной работе обобщим постановку задачи (2)–(5) и уточним результаты работы [23] о свойствах решений этой задачи и условиях его существования и несуществования, а также единственности. Кроме того, приведем один достаточно простой численный метод решения задачи, основанный на методе последовательных приближений, и опишем результаты численных экспериментов. Сходимость имеется при определенных значениях параметров, описывающих данные задачи.

Определения используемых пространств Гёльдера $C^{\alpha,\alpha/2}(Q)$, Соболева $W_2^s(Q)$, $W_2^{1,2}(Q)$ и др. могут быть найдены, например, в [24, 25].

Вспомогательные утверждения

Положим

$$Au = a(x)l_0u - l_1u, \quad l_0u = u_{xx} - u_x, \quad l_1u = \mu u_x + \overline{\mu}u, \quad Lu = u_t - Au.$$

Для удобства ниже считаем, что параметр $\overline{\mu}$ обладает свойством: $\overline{\mu} > 0$ и $\overline{\mu} \geq 1 - \mu/2$, иначе сделаем замену неизвестной функции $u = e^{\lambda_0 t}v$, выбрав $\lambda_0 > \max(-\overline{\mu}, 1 - \overline{\mu} - \mu/2)$. После замены параметр $\overline{\mu}$ перейдет в новый параметр $\overline{\mu} + \lambda_0$ и эти условия будут выполнены. Пусть также

$$(u,v) = \int\limits_Q u(t,x)v(t,x)\,dxdt$$

— скалярное произведение в $L_2(Q)$. Переформулируем нашу обратную задачу в виде: *найти функцию* $a|_{G_0}$ *и решение уравнения* (2), *удовлетворяющее уравнению* (3) *и условию переопределения*

$$A_1(a(x)l_0u_T - l_1u_T) = A_1(a(x)l_0u(x,T) - l_1u(x,T)), \quad x \in G_0, \tag{6}$$

где $A_1v = a_0(x)v_{xx} + a_1v_x + a_2v$ $(a_i \in C^{2-i}([c,d]),\ i = 0,1,2,\ a_0(x) > 0\ \forall x \in [c,d])$, *причем задача Дирихле* $A_1v = f \in L_2(G_0)$, $v|_{\partial G_0} = 0$ *имеет единственное решение.*

В частности, можем взять $A_1 = \partial_{xx}$. Равенство (6) понимается в смысле следующего интегрального тождества:

$$\int_c^d (a(x)l_0(u_T(x) - u(x,T)) - l_1(u_T(x) - u(x,T)))A_1^*\varphi(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(G_0),$$

где A_1^* — формально сопряженный оператор к A_1. Таким образом, мы переписываем условие переопределения (4) в виде (6). В этом случае исходное равенство (4) имеет место с точностью до 4-х линейно независимых функций. Именно в такой постановке задача становится корректной в определенных классах.

Определим оператор R, сопоставляющий функции u, непрерывной на промежутке $[c,d]$, решение задачи Дирихле $A_1v = 0$, $v|_{\partial G_0} = u|_{\partial G_0}$. Для $A_1 = \partial_{xx}$ имеем

$$v = R(u) = \left(\frac{x-c}{d-c}\right)u(d) + \left(\frac{d-x}{d-c}\right)u(c).$$

Положим $\beta^0 = \min(c-1/2, -1/2), \alpha^0 = \min(c-1, -1)$ и построим неотрицательную функцию ψ_0 со свойством

$$\psi_0 \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \psi_0 = \begin{cases} 1, & x \le \alpha^0, \\ 0, & x \ge \beta^0, \end{cases}$$

Определим функцию $\beta(x,t) = \psi_0(x)\varphi_0(t,x)$, $\varphi_0 = s^*(e^{-\overline{\mu}t} - e^{x-(\overline{\mu}+\mu)t})$.

Опишем свойства решений задачи (2), (3), (5). Пусть $Q_R = (0,T)\times(-R,R)$, $R > 0$.

Теорема 1. *Пусть* $a(x) \in C(\mathbb{R})$, *существуют ненулевые пределы* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a(x)$ *и найдутся постоянные* $m, M > 0$ *такие, что* $m \le a(x) \le M$ *для всех* $x \in \mathbb{R}$. *Тогда существует единственное решение задачи* (2), (3), (5) *такое, что* $u \in L_\infty(Q) \cap W_2^{1,2}(Q_R)$ *для всех* $R > 0$. *Решение будет обладать свойством*

$$u = \beta(t,x) + v(t,x),$$

где v — *решение задачи*

$$\begin{gathered} v_t - Av = 2a\psi_{0x}\varphi_{0x} + a\psi_{0xx}\varphi_0 - (\mu + a)\psi_{0x}\varphi_0 = f_0(t,x), \\ v(0,x) = (1-\psi_0)u_0(x) = v_0(x) \end{gathered} \tag{7}$$

такое, что

$$v, tv_t \in W_2^{1,2}(Q), \quad ve^{\gamma(1+x^2)^{1/2}}, tv_t e^{\gamma(1+x^2)^{1/2}} \in W_2^{1,2}(Q) \quad \forall \gamma > 0. \tag{8}$$

Доказательство. Равенство (7) проверяется непосредственной подстановкой представления для функции u в уравнение (2). Оставшиеся утверждения вытекают из известных свойств решений параболических задач. Поэтому приведем только набросок доказательства. Вначале отметим, что $\operatorname{supp} v_0 \subset [\alpha^0, 0]$, $\operatorname{supp} f_0 \subset [0, T] \times [\alpha^0, -1/2]$ и тем самым

$$f_0 e^{\gamma(1+x^2)^{1/2}} \in W_2^2(Q), \quad v_0 e^{\gamma(1+x^2)^{1/2}} \in W_2^1(\mathbb{R})$$

для всех $\gamma > 0$. Существование и единственность решений задачи (7) из $W_2^{1,2}(Q)$ вытекает, например, из теоремы 10.4 в [25] или теоремы 5.7 в [26]. Пусть функция v_2 есть решение задачи

$$v_{2t} - Av_2 = v_t + (f_0 t)_t, \quad v_2|_{t=0} = v_0. \tag{9}$$

Решение этой задачи $v_2 \in W_2^{1,2}(Q)$ существует и единственно. Тогда функция

$$\overline{v} = \int_0^t v_2(x, \tau)\, d\tau$$

есть решение задачи

$$\overline{v}_t - A\overline{v} = tf_0 + v(t, x), \quad \overline{v}|_{t=0} = 0.$$

Но функция tv также является решением этой задачи из необходимого класса. Следовательно, $tv = \overline{v}$ и, значит, $(tv)_t \in W_2^{1,2}(Q)$, т. е. $tv_t \in W_2^{1,2}(Q)$, $tv_t|_{t=0} = 0$. Пусть $\varphi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi(x) \geq 0$ для всех x, $\operatorname{supp} \varphi \subset (-2, 2)$, $\varphi(x) = 1$ при $|x| \leq 1$. Построим функцию $\varphi_\gamma^R = e^{\gamma(1+x^2)^{1/2}\varphi(x/R)}$ $(\gamma > 0)$. Функция $w = v\varphi_\gamma^R$ есть решение задачи

$$Lw = f_0\varphi_\gamma^R - a\varphi_{\gamma xx}^R v - 2a\varphi_{\gamma x}^R v_x + (\mu + a)\varphi_{\gamma x}^R v, \quad w(0, x) = v_0\varphi_\gamma^R.$$

Используя определение функции φ_γ^R, это равенство можно переписать в виде

$$Lw = f_0\varphi_\gamma^R + a_1(R, x)w_x + a_2(R, x)w, \tag{10}$$

где функции $a_i(R, x)$ обладают тем свойством, что найдется постоянная c_0, не зависящая от R, такая, что $|a_i(R, x)| \leq c_0$ для всех $x \in \mathbb{R}$. В силу того, что оценка решений уравнения (10) из класса $W_2^{1,2}(Q)$ зависит только от величины c_0 (см. [25, 26]), найдется постоянная c_1 такая, что имеет место неравенство

$$\|w\|_{W_2^{1,2}(Q)} \leq c_1\big(\|f_0\varphi_\gamma^R\|_{L_2(Q)} + \|v_0\varphi_\gamma^R|_{W_2^1(\mathbb{R})}\big) \leq c(\gamma)$$

с постоянной $c(\gamma)$, не зависящей от R в силу компактности носителей f_0, v_0. Используя теперь, например, теорему Леви о предельном переходе под знаком интеграла, заключаем, что $ve^{\gamma(1+x^2)} \in W_2^{1,2}(Q)$. Дифференцируя уравнение (7) по t и повторяя рассуждения для функции tv_t, получим утверждение и для этой функции. Осталось показать, что решение задачи (2), (3), (5) в классе решений, принадлежащих $L_\infty(Q)$ и $W_2^{1,2}(Q_R)$ для всех $R > 0$, единственно. Пусть u — решение однородной задачи (2), (3), (5). Запишем уравнение (2) в виде

$$u_t\frac{e^{-g_0}}{a} - \partial_x(e^{-g_0}u_x) + \frac{e^{-g_0}}{a}\overline{\mu}u = 0, \quad g_0 = x + \int\limits_c^x \frac{\mu}{a(\xi)}\,d\xi. \tag{11}$$

Пусть $v \in W_2^{1,2}(Q)$, $v|_{t=T} = 0$ и $\operatorname{supp} v \subset \overline{Q_R}$. Умножим (11) на v, проинтегрируем результат по Q и затем проинтегрируем по частям. Получим равенство

$$\left(u, -v_t\frac{e^{-g_0}}{a} - \partial_x(e^{-g_0}v_x) + \frac{e^{-g_0}}{a}\overline{\mu}v\right) = \left(u\frac{e^{-g_0}}{a}, -v_t - Av\right) = 0. \tag{12}$$

Фиксируем R_0 и решим задачу

$$-v_t - Av = u\varphi(x/R_0) \in L_2(Q), \quad v|_{t=T} = 0.$$

Существует единственное решение этой задачи из класса $v \in W_2^{1,2}(Q)$. Более того, сделав замену $\tau = T - t$, как и в первой половине доказательства, устанавливаем, что $ve^{\gamma(1+x^2)^{1/2}} \to 0$ при $|x| \to \infty$ и $\gamma > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла последовательность $v_n = v\varphi(x/n)$ сходится к v в норме пространства $W_2^{1,2}(Q)$. Взяв в (12) в качестве пробной функции v функцию v_n и переходя к пределу, получим, что $\left(u\frac{e^{-g_0}}{a}, u\varphi(x/R_0)\right) = 0$. Отсюда $u = 0$ на Q_{R_0}. В силу произвольности R_0 имеем $u \equiv 0$.

Замечание 1. Заметим, что вышеприведенным способом можно доказать единственность решений в классе функций $u \in W_{2,\mathrm{loc}}^{1,2}(Q_R)$ для всех R, растущих не быстрее, чем $e^{\gamma(1+x^2)^{1/2}}$ для некоторого $\gamma > 0$, что вполне соответствует классическим результатам.

Получим вспомогательные априорные оценки для решения задачи (7).

Лемма 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1, *и функция* v *есть решение задачи* (7). *Справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]}\int\limits_{\mathbb{R}} |v_x|^2 e^{-x}dx \le \|f_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(Q)} + \|v_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \tag{13}$$

$$2\int\limits_Q a(x)e^{-x}|l_0v|^2\,dxdt \le \|f_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(Q)} + \|v_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \tag{14}$$

$$\int\limits_Q e^{-x}v_x^2\,dxdt \le \|f_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(Q)} + \|v_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}, \tag{15}$$

$$\int\limits_Q \frac{e^{-x}}{a}v_t^2\,dx \le \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}\left[v_{0x}^2 + \frac{\overline{\mu}}{a}v_0^2\right]dx + 2\int\limits_Q \frac{e^{-x}}{a}f_0^2\,dxdt + 2\int\limits_Q \frac{e^{-x}}{a}\mu^2v_x^2\,dx. \tag{16}$$

Доказательство. Умножим уравнение (7) на $-\partial_x e^{-x} v_x$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}$. Интегрируя по частям, получим

$$\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} v_x^2\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}} a e^{-x} (l_0 v)^2\, dx + \frac{(2\overline{\mu} + \mu)}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} v_x^2\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{0x} e^{-x} v_x\, dx. \quad (17)$$

Далее используем неравенство Коши с ε:

$$|ab| \le \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon}. \quad (18)$$

Интегрируя равенство (17) по t от нуля до t и оценивая правую часть, получим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} v_x^2(t,x)\, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} a e^{-x} (l_0 v)^2\, dxdt + \frac{(2\overline{\mu} + \mu)}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} v_x^2\, dxdt$$
$$\le \left| \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} f_{0x} e^{-x} v_x\, dxdt \right| + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} v_{0x}^2\, dx$$
$$\le \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} |f_{0x}|^2 e^{-x}\, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} |v_x|^2 e^{-x}\, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} v_{0x}^2\, dx \quad (19)$$

Воспользовавшись неравенством $2\overline{\mu} + \mu \ge 2$, приходим к оценке

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} v_x^2(t,x)\, dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} a e^{-x} (l_0 v)^2\, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} v_x^2\, dxdt$$
$$\le \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} |f_{0x}|^2 e^{-x} dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} v_{0x}^2\, dx.$$

Из этого неравенства вытекают первые три неравенства из утверждения леммы. Получим последнее неравенство. Умножим равенство (7) на $e^{-x} v_t / a$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}$. Получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{a} v_t^2\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{a} \mu v_x v_t\, dx + \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} \left[v_x^2 + \frac{\overline{\mu}}{a} v^2 \right] dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f_0 \frac{e^{-x}}{a} v_t\, dx. \quad (20)$$

Интегрируя (20) от нуля до T и отбрасывая часть неотрицательных слагаемых слева, приходим к неравенству (используем (18))

$$\int\limits_Q \frac{e^{-x}}{a} v_t^2\, dxdt \le \left| \int\limits_Q \frac{e^{-x}}{a} \mu v_x v_t\, dxdt \right| + \int\limits_Q \frac{e^{-x}}{a} f_0 v_t\, dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} \left[v_{0x}^2 + \frac{\overline{\mu}}{a} v_0^2 \right] dx$$
$$\le \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} \left[v_{0x}^2 + \frac{\overline{\mu}}{a} v_0^2 \right] dx + \int\limits_Q e^{-x} \frac{f_0^2}{a}\, dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_Q e^{-x} \frac{v_t^2}{a}\, dxdt + \int\limits_Q e^{-x} \frac{\mu^2}{a} v_x^2\, dxdt.$$

Перенося слагаемые с v_t из правой части неравенства в левую, получим неравенство (16).

Лемма 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и функция* v *есть решение задачи* (7). *Пусть* $w = tv_t$, $\widetilde{f}_0 = tf_{0t}$. *Справедлива оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} w_x^2(t,x)\,dx \le \int\limits_{Q} \widetilde{f}_{0x}^2 e^{-x}\,dxdt + \int\limits_{Q} \frac{e^{-x}}{a} v_t^2\,dxdt, \tag{21}$$

$$\int\limits_{Q} ae^{-x}(l_0w)^2(t,x)\,dxdt + \int\limits_{Q} e^{-x} w_x^2(t,x)\,dxdt \le \int\limits_{Q} \widetilde{f}_{0x}^2 e^{-x}\,dxdt + \int\limits_{Q} \frac{e^{-x}}{a} v_t^2\,dxdt. \tag{22}$$

Доказательство. Продифференцируем уравнение (7) по t и умножим результат на t. Получим равенства

$$w_t - Aw = \widetilde{f}_0 + v_t, \quad w(0,x) = 0, \tag{23}$$

Умножим уравнение (23) на $-\partial_x e^{-x} w_x$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}$. Интегрируя по частям, получим

$$\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} w_x^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}} ae^{-x}(l_0w)^2\,dx + \frac{(2\overline{\mu}+\mu)}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} w_x^2\,dx$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_{0x} e^{-x} w_x\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}} v_t e^{-x} l_0 w\,dx. \tag{24}$$

Интегрируя равенство (24) по t от нуля до t и оценивая правую часть, получим неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} w_x^2(t,x)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} ae^{-x}(l_0w)^2\,dxdt + \frac{(2\overline{\mu}+\mu)}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} w_x^2\,dxdt$$
$$\le \left| \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_{0x} e^{-x} w_x\,dxdt \right| + \left| \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} v_t e^{-x} l_0 w\,dxdt \right| \le \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_{0x}^2 e^{-x}\,dxdt$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} w_x^2 e^{-x}\,dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{a} v_t^2\,dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} ae^{-x}(l_0w)^2\,dxdt. \tag{25}$$

Воспользовавшись неравенством $2\overline{\mu} + \mu \ge 2$, получим оценку

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} w_x^2(t,x)\,dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} ae^{-x}(l_0w)^2\,dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} w_x^2\,dxdt$$
$$\le \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \widetilde{f}_{0x}^2 e^{-x}\,dxdt + \frac{1}{2} \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{a} v_t^2\,dxdt \tag{26}$$

Из этого неравенства вытекают два неравенства из утверждения леммы.

Далее считаем, что функция a удовлетворяет условиям теоремы 1. Из лемм 1, 2 вытекают следующие утверждения.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1, функция v есть решение задачи (7). Пусть $w = tv_t$, $\widetilde{f}_0 = tf_{0t}$. Справедливы оценки*

$$\max_{t\in[0,T]}\int_{\mathbb{R}} e^{-x}w_x^2(t,x)\,dx \le \|\widetilde{f}_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(Q)} + \|v_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + 2\left\|\frac{f_0}{\sqrt{a}}e^{-x/2}\right\|^2_{L_2(Q)}$$

$$+\overline{\mu}\left\|\frac{v_0e^{-x/2}}{\sqrt{a}}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \frac{2\mu^2}{m}\big(\|v_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \|f_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(Q)}\big), \quad (27)$$

$$\int_Q ae^{-x}(l_0w)^2(t,x)\,dxdt + \int_Q e^{-x}w_x^2(t,x)\,dxdt$$

$$\le \|\widetilde{f}_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(Q)} + \|v_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$+ 2\left\|\frac{f_0}{\sqrt{a}}e^{-x/2}\right\|^2_{L_2(Q)} + \overline{\mu}\left\|\frac{v_0e^{-x/2}}{\sqrt{a}}\right\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$$

$$+\frac{2\mu^2}{m}\left(\|v_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \|f_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(Q)}\right). \quad (28)$$

Правую часть этих неравенств можно записать в виде

$$\alpha^* = (s^*)^2\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{m}\right), \quad (29)$$

где α_0, α_1 — некоторые постоянные, зависящие от $T, \mu, \overline{\mu}$.

Для доказательства достаточно воспользоваться оценками из леммы 2, правые части которых оцениваются с использованием оценок из леммы 1.

Лемма 4. *Пусть функция $v(t,x)$ удовлетворяет условиям (8). Тогда $v \in C\big((0,T];W_2^2(\mathbb{R})\big)$, $l_1v, al_0v \in C((0,T];L_2(\mathbb{R}))$, $tv_te^{\gamma(1+x^2)^{1/2}} \in C\big([0,T];W_2^1(\mathbb{R})\big)$ для всех $\gamma > 0$ (после могут быть изменения на множестве меры нуль) и имеют место неравенство*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x}v_{tx}^2\,dx \ge \frac{e^{-d}}{5\beta_0^2}\|v_t\|^2_{C([c,d])} \quad \forall t\in(0,T]. \quad (30)$$

где β_0 — постоянная из неравенства $\|v\|_{C([c,d])} \le \beta_0\|v\|_{W_2^1(c,d)}$.

Доказательство. Сразу отметим, что имеет место вложение $W_2^1(c,d) \subset C^{1/2}([c,d])$ (см. пп. 4.6.1, 4.6.2 в [24]) и соответствующие оценки

$$\|g(x)\|_{C([c,d])} \le \beta_0\|g(x)\|_{W_2^1(c,d)}, \quad \|g(x)\|_{C^\alpha([c,d])} \le \beta_\alpha\|g(x)\|_{W_2^1(c,d)} \ (\alpha \le 1/2) \quad (31)$$

для всех $g \in W_2^1(c,d)$. Постоянная β_0 может быть легко оценена. Например, используя равенство

$$g(x) = g(c) + \int_c^x g_\tau\,d\tau,$$

можно показать, что мы можем взять $\beta_0 = (\sqrt{d-c})^{-1} + 2\sqrt{d-c}$ (это не самая точная оценка для этой постоянной). Имеем $tv_t e^{\gamma(1+x^2)^{1/2}} \in L_2\big(0,T;W_2^2(\mathbb{R})\big)$, $(tv_t)_t e^{\gamma(1+x^2)^{1/2}} \in L_2(0,T;L_2(\mathbb{R}))$ и как следствие известных теорем вложения $tv_t e^{\gamma(1+x^2)^{1/2}} \in C\big([0,T];W_2^1(\mathbb{R})\big)$ (после, может быть, изменения на множестве меры нуль). Первые включения в утверждении леммы также очевидны, поскольку $tv_t, tv \in L_2\big(0,T;W_2^2(\mathbb{R})\big)$ и, значит, $tv \in C\big([0,T];W_2^2(\mathbb{R})\big)$ опять же в силу известных терем вложения. Одна из них (в абстрактной форме) это теорема III 4.10.2 в [27], на которую можно сослаться для обоснования всех включений. Получим неравенство (30). Положим $u(t,x) = v_t(t,x)$. Интегрируя по частям и используя (18), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u^2 e^{-x}\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} 2uu_x e^{-x}\,dx \le \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} u^2 e^{-x}\,dx + 2\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} u_x^2\,dx.$$

Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{R}} u^2 e^{-x}\,dx \le 4\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} u_x^2\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}u_x^2\,dx = \frac{1}{5}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}u_x^2\,dx + \frac{4}{5}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}u_x^2\,dx \ge \frac{1}{5}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}\big(u_x^2+u^2\big)\,dx$$

$$\ge \frac{e^{-d}}{5}\int\limits_c^d \big(u_x^2+u^2\big)\,dx \ge \frac{e^{-d}}{5\beta_0^2}\|u\|^2_{C([c,d])} \quad \forall t \in (0,T].$$

Основные результаты

Предположим, что $u_T \in C^2(\overline{G_0})$, и введем функцию

$$R_0(x) = \frac{(R(al_0u_T - l_1u_T) + l_1u_T)}{l_0u_T}.$$

Положим $\delta_0 = \inf_{G_0}|l_0u_T(x)|$, $\delta_1 = \inf_{G_0}|R_0(x)|$, $M_1 = \sup\limits_{G_0}|R_0(x)|$ и допустим, что

$$\delta_i > 0\ (i=0,\ 1), \quad R_0 \ge 0\ \forall x \in G_0, \quad a(x)|_{\mathbb{R}\setminus G_0} \in C(\overline{\mathbb{R}\setminus G_0}); \tag{32}$$

существуют ненулевые пределы $\lim\limits_{x\to\pm\infty} a(x)$ и найдутся постоянные m_0, $M_0 > 0$ такие, что

$$m_0 \le a(x) \le M_0 \quad \forall x \in \mathbb{R}\setminus G_0. \tag{33}$$

Ищем функцию $a|_{[c,d]}$ в классе

$$W_m = \{a \in C([c,d]) : \max(M_0,M_1)+\delta_1/2 \ge a(x) \ge m = \min(m_0,\delta_1/2)\ \forall x \in [c,d],$$
$$a|_{x=c} = a(c),\ a|_{x=d} = a(d)\},$$

где $a(c), a(d)$ — известные нам предельные значения функции $a|_{\mathbb{R}\setminus G_0}$ в точках c,d. Очевидным образом оператор $R : C([c,d]) \to C([c,d])$ ограничен. Обозначим его норму через r_0. Множество W_m выпукло и замкнуто.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (32), (33) *и*

$$2(1+r_0)s^*\sqrt{5\left(\alpha_0+\frac{\alpha_1}{m}\right)}\beta_0 e^{d/2}\le \delta_0\delta_1 T. \tag{34}$$

Тогда существует решение задачи (2), (3), (6) *такое, что функция* u *обладает свойствами, описанными в теореме* 1, $a\in C(\mathbb{R})$, $a|_{[c,d]}\in W_m$.

Доказательство. Используем теорему Шаудера. Предположим, что $a|_{[c,d]}\in W_m$. Построим решение задачи (2), (3). По построению $u|_{[c,d]}=v|_{[c,d]}$ (см. представление из теоремы 1). Уравнение (2) при $t=T$ имеет смысл, и на промежутке $[c,d]$ выполняется равенство

$$v_t(T,x)-al_0v(T,x)+l_1v(T,x)=0. \tag{35}$$

Рассмотрим выражение

$$\int\limits_c^d (a(x)l_0v(T,x)-l_1v(T,x))A_1^*\varphi(x)\,dx=\int\limits_c^d v_tA_1^*\varphi(x)\,dx,\quad \varphi\in C_0^\infty(G_0). \tag{36}$$

Если u — решение задачи (2), (3), (6), то из (6) вытекает, что

$$\int\limits_c^d (a(x)l_0u_T(x)-l_1u_T(x))A_1^*\varphi(x)\,dx=\int\limits_c^d v_tA_1^*\varphi(x)\,dx,\quad \varphi\in C_0^\infty(G_0). \tag{37}$$

Отметим, что

$$\int\limits_c^d R(g)A_1^*\varphi(x)\,dx=0$$

для любой непрерывной функции g. Тогда равенство (37) переписывается в виде

$$\int\limits_c^d \big[(a(x)l_0u_T(x)-l_1u_T(x))-R(a(x)l_0u_T(x)-l_1u_T(x))\big]A_1^*\varphi(x)\,dx$$
$$=\int\limits_c^d (v_t(T,x)-R(v_t(T,x)))A_1^*\varphi(x)\,dx,\quad \varphi\in C_0^\infty(G_0). \tag{38}$$

Поскольку задача Дирихле по условию имеет единственное решение и обобщенное решение также обладает этим свойством, а функции под знаком интеграла обращаются в нуль при $x=c,d$, то

$$a(x)l_0u_T(x)-l_1u_T(x)-R(a(x)l_0u_T(x)-l_1u_T(x))=v_t(T,x)-R(v_t(T,x)). \tag{39}$$

Выражая отсюда функцию a, получим

$$a(x)=R_0(x)+\frac{v_t(T,x)-R(v_t(T,x))}{l_0u_T}=R_0(x)+S_0(a)=S(a), \tag{40}$$

где функция v_t по сути есть оператор от функции a, сопоставляющий функции a функцию v из представления решения задачи (2), (3). По построению $S(a)|_{x=c} = a(c)$, $S(a)|_{x=d} = a(d)$ независимо от того, какой будет функция $a \in W_m$. Это и есть искомое уравнение для нахождения функции $a(x)|_{[c,d]}$. Покажем, что при выполнении условия (34) применима теорема Шаудера. Пусть $a|_{[c,d]} \in W_m$. Из определений имеем

$$\|S_0(a)\|_{C([c,d])} \leq \frac{(1+r_0)}{\delta_0}\|v_t(t,x)\|_{C([c,d])}. \tag{41}$$

В силу леммы 4 правая часть оценивается через

$$\frac{(1+r_0)e^{d/2}\sqrt{5}\beta_0}{\delta_0}\|e^{-x/2}v_{tx}\|_{L_2(c,d)}.$$

По лемме 3 норма в правой части оценивается через $\frac{s^*}{T}(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{m})^{1/2}$. Тогда из (41), (34) вытекает оценка

$$\|S_0(a)\|_{C([c,d])} \leq \frac{(1+r_0)e^{d/2}\sqrt{5}\beta_0}{T\delta_0}s^*\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{m}\right)^{1/2} \leq \frac{\delta_1}{2}. \tag{42}$$

Таким образом,

$$S(a) = R_0 + S_0(a) \geq \delta_1 - \delta_1/2 = \delta_1/2, \quad S(a) \leq M_1 + \delta_1/2.$$

Отсюда вытекает, что $S(a) \in W_m$. При $\alpha \leq 1/2$ аналогично получим оценку

$$\|v_t(T,x) - R(v_t(T,x))\|_{C^\alpha([c,d])} \leq (1+r_\alpha)e^{d/2}\sqrt{5}\beta_\alpha s^*\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{m}\right)^{1/2}/T, \tag{43}$$

где r_α — норма оператора $R : C^\alpha([c,d]) \to C^\alpha([c,d])$. В силу компактности вложения $C^\alpha([c,d])$ в $C([c,d])$ оператор $S(a)$ компактен. Его непрерывность более или менее очевидна (ниже в теореме 3 получим точные оценки, гарантирующие непрерывность, поэтому здесь подробное доказательство опустим). Применяя теорему Шаудера, получим, что решение уравнения (40) существует. С данной функцией a можем построить решение u задачи (2), (3). Покажем, что условие (6) выполнено. Как и ранее, имеем равенство (36). С другой стороны, из (40) вытекает равенство (39) и соответственно равенства (38), (37). Вычитая (36) из (37), придем к тому, что выполнено равенство (6), т. е. построено решение рассматриваемой обратной задачи.

Замечание 1. Как очевидное следствие доказательства имеем, что $a|_{[c,d]} \in C^\alpha([c,d])$ при дополнительном условии $R_0(x), l_0u_T \in C^\alpha([c,d])$ $(\alpha \leq 1/2)$.

Выражение $\|f_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(Q)} + \|v_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$ можно записать в виде $(s^*)^2\alpha_2$, где постоянная α_2 зависит от $T, \mu, \overline{\mu}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (32), (33). *Тогда если*

$$\sqrt{10}\beta_0 e^{d/2}\frac{(1+r_0)}{\delta_0}\frac{s^*}{Tm}\left[\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{m}\right) + \alpha_2\left(1 + \frac{\mu^2}{8m}\right)\right]^{1/2} < 1, \tag{44}$$

то любые два решения $(u_i, a_i|_{[c,d]})$ $(i = 1,2)$ *задачи* (2), (3), (6) *из класса, указанного в теореме* 2, *такие, что* $a_i|_{[c,d]} \geq m$, *совпадают.*

Доказательство. Пусть v_i $(i = 1,2)$ — соответствующие решения задачи (7), где $a = a_i$. Имеем

$$v_{it} - a_i l_0 v_i + l_1 v_i = f_0, \quad a_1|_{\mathbb{R}\setminus[c,d]} = a_2|_{\mathbb{R}\setminus[c,d]}. \tag{45}$$

Вычитая из первого уравнения (45) второе, получим

$$\omega_t - \overline{a} l_0 \omega + l_1 \omega = \Delta a l_0 \overline{v},\ \overline{a} = \frac{a_1 + a_2}{2},\ \overline{v} = \frac{v_1 + v_2}{2},\ \omega = v_1 - v_2,\ \Delta a = a_1 - a_2. \tag{46}$$

По определению оператора R

$$R((a_1(x) l_0 u_T(x)) - l_1 u_T(x)) = R((a_2(x) l_0 u_T(x)) - l_1 u_T(x)).$$

Пусть

$$R_0 = \frac{(R(a_1 l_0 u_T - l_1 u_T) + l_1 u_T)}{l_0 u_T}.$$

Тогда уравнения (40) запишутся в виде

$$a_i(x) = R_0(x) + \frac{v_{it}(T,x) - R(v_{it}(T,x))}{l_0 u_T} = R_0(x) + S_i(a). \tag{47}$$

Вычитая два этих уравнения, получим

$$\Delta a = \frac{\omega_t(T,x) - R(\omega_t(T,x))}{l_0 u_T}. \tag{48}$$

Далее используем оценки. Из (48) получим неравенство

$$\|\Delta a\|_{C([c,d])} \leq \frac{(1 + r_0)}{\delta_0} \|\omega_t(T,x)\|_{C([c,d])}. \tag{49}$$

Используя лемму 4, оценим правую часть через

$$\sqrt{5} \beta_0 e^{d/2} \frac{(1 + r_0)}{\delta_0} \|\omega_{tx}(T,x) e^{-x/2}\|_{L_2([c,d])}. \tag{50}$$

Функция $W = t\omega_t$ есть решение уравнения

$$W_t - \overline{a} l_0 W + l_1 W = t \Delta a l_0 \overline{v_t} + \omega_t. \tag{51}$$

Повторим рассуждения из леммы 2. Умножим уравнение (51) на $-e^{-x} l_0 W$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}$. Интегрируя по частям, получим

$$\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} W_x^2\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}} \overline{a} e^{-x} (l_0 W)^2\, dx + \frac{(2\overline{\mu} + \mu)}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} W_x^2\, dx$$
$$= -\int\limits_{\mathbb{R}} t \Delta a l_0 \overline{v_t} e^{-x} l_0 W\, dx - \int\limits_{\mathbb{R}} w_t e^{-x} l_0 W\, dx = J_1 + J_2. \tag{52}$$

Оценим первое слагаемое J_1 в правой части следующим образом (см. (18)):

$$|J_1| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} t\frac{\Delta a}{2} l_0 v_{1t} e^{-x} l_0 W\,dx\right| + \left|\int\limits_{\mathbb{R}} t\frac{\Delta a}{2} l_0 v_{2t} e^{-x} l_0 W\,dx\right|$$
$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}\frac{|\Delta a|^2}{2a_1}(l_0 t v_{1t})^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}\frac{|\Delta a|^2}{2a_2}(l_0 t v_{2t})^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}\frac{\overline{a}}{2}(l_0 W)^2\,dx. \quad (53)$$

Аналогично

$$|J_2| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}} w_t e^{-x} l_0 W\,dx\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{w_t^2}{2\overline{a}} e^{-x}\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}\frac{\overline{a}}{2}(l_0 W)^2\,dx. \quad (54)$$

Из (52)–(54) вытекает оценка

$$\partial_t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} W_x^2\,dx + \frac{(2\overline{\mu}+\mu)}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} W_x^2\,dx$$
$$\leq \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}\frac{|\Delta a|^2}{2a_1}(l_0 v_{1t})^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}\frac{|\Delta a|^2}{2a_2}(l_0 v_{2t})^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{w_t^2}{2\overline{a}} e^{-x}\,dx. \quad (55)$$

Интегрируя неравенство (55) по t от нуля до t (отметим, что $2\overline{\mu}+\mu \geq 2$), получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} W_x^2(t,x)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} W_x^2\,dxdt$$
$$\leq \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\Delta a|^2}{2a_1} e^{-x}(l_0 t v_{1t})^2\,dxdt + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}\frac{|\Delta a|^2}{2a_2}(l_0 t v_{2t})^2\,dxdt + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{w_t^2}{2\overline{a}} e^{-x}\,dxdt. \quad (56)$$

Воспользовавшись неравенством (28), где берем вместо ω функции tv_{it}, получим оценку

$$\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\Delta a|^2}{2a_1} e^{-x}(t l_0 v_{1t})^2\,dxdt + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x}\frac{|\Delta a|^2}{2a_2}(l_0 t v_{2t})^2\,dxdt$$
$$\leq \frac{\|\Delta a\|^2_{C([c,d])}}{2m^2}\left(\int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} a_1 (t l_0 v_{1t})^2\,dxdt + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} a_2 (t l_0 v_{2t})^2\,dxdt\right)$$
$$\leq \frac{\|\Delta a\|^2_{C([c,d])}}{m^2}\alpha^*. \quad (57)$$

Чтобы оценить последнее слагаемое в (56), надо получить аналог неравенства (16). Умножим уравнение (45) на $\frac{e^{-x}\omega_t}{\overline{a}}$ и проинтегрируем по $\mathbb{R}$. Получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{\overline{a}}\omega_t^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{\overline{a}}\mu\omega_x\omega_t\,dx + \partial_t \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2}\left[\omega_x^2 + \frac{\overline{\mu}}{\overline{a}}\omega^2\right]dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \Delta a l_0 \overline{v}\frac{e^{-x}}{\overline{a}}\omega_t\,dx. \quad (58)$$

Интегрируя (58) от нуля до T и отбрасывая часть неотрицательных слагаемых слева, получим неравенство (используем (18))

$$\int\limits_Q \frac{e^{-x}}{\overline{a}}\omega_t^2\,dxdt \le \left|\int\limits_Q \frac{e^{-x}}{\overline{a}}\mu\omega_x\omega_t\,dxdt\right| + \left|\int\limits_Q \Delta a l_0\overline{v}\frac{e^{-x}}{\overline{a}}\omega_t\,dxdt\right|$$
$$\le \int\limits_Q \frac{e^{-x}}{\overline{a}}\mu^2 e^{-x}\omega_x^2\,dxdt + \int\limits_Q \frac{e^{-x}}{4\overline{a}}\omega_t^2\,dxdt + \int\limits_Q \frac{|\Delta a|^2}{\overline{a}}e^{-x}(l_0v_1)^2\,dxdt$$
$$+ \int\limits_Q \frac{|\Delta a|^2}{\overline{a}}e^{-x}(l_0v_2)^2\,dxdt + \int\limits_Q \frac{e^{-x}}{4\overline{a}}\omega_t^2\,dxdt.$$

Перенося слагаемые с ω_t из правой части неравенства в левую, получим неравенство

$$\int\limits_Q \frac{e^{-x}}{\overline{a}}\omega_t^2\,dxdt \le \int\limits_Q \frac{2e^{-x}}{\overline{a}}\mu^2\omega_x^2\,dxdt + \int\limits_Q \frac{2|\Delta a|^2}{\overline{a}}e^{-x}(l_0v_1)^2\,dxdt$$
$$+ \int\limits_Q \frac{2|\Delta a|^2}{\overline{a}}e^{-x}(l_0v_2)^2\,dxdt \le \frac{2\mu^2}{m}\int\limits_Q e^{-x}\omega_x^2\,dxdt$$
$$+ 2\frac{\|\Delta a\|^2_{C([c,d])}}{m^2}\left(\int\limits_Q e^{-x}a_1(l_0v_1)^2\,dxdt + \int\limits_Q e^{-x}a_2(l_0v_2)^2\,dxdt\right). \quad (59)$$

Оценка для первого интеграла в правой части получается точно так же, как и в лемме 1 — умножением уравнения (46) на $-e^{-x}l_0\omega$ и интегрированием по частям. Аналогично

$$\frac{2\mu^2}{m}\int\limits_Q e^{-x}\omega_x^2\,dxdt \le \frac{\mu^2}{m}\frac{\|\Delta a\|^2_{C([c,d])}}{4m^2}\left(\int\limits_Q e^{-x}a_1(l_0v_1)^2\,dxdt + \int\limits_Q e^{-x}a_2(l_0v_2)^2\,dxdt\right). \quad (60)$$

Используя оценку (14), где берем вместо v функции v_i, имеем

$$\int\limits_Q e^{-x}a_1(l_0v_1)^2\,dxdt + \int\limits_Q e^{-x}a_2(l_0v_2)^2\,dxdt$$
$$\le \|f_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(Q)} + \|v_{0x}e^{-x/2}\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = (s^*)^2\alpha_2, \quad (61)$$

где постоянная α_2 зависит от $T,\mu,\overline{\mu}$. Используя (61), (60), (59), получим

$$\int\limits_Q \frac{e^{-x}}{a}\omega_t^2\,dxdt \le \frac{\|\Delta a\|^2_{C([c,d])}}{m^2}\left(2+\frac{\mu^2}{4m}\right)(s^*)^2\alpha_2. \quad (62)$$

Используя неравенства (57), (62) в (56), имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2} W_x^2(t,x)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-x} W_x^2\,dxdt$$
$$\leq \frac{\|\Delta a\|^2_{C([c,d])}}{m^2}\alpha^* + \frac{\|\Delta a\|^2_{C([c,d])}}{2m^2}\left(2 + \frac{\mu^2}{4m}\right)(s^*)^2\alpha_2$$
$$= \frac{\|\Delta a\|^2_{C([c,d])}}{m^2}(s^*)^2\left[\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{m}\right) + \alpha_2\left(1 + \frac{\mu^2}{8m}\right)\right] = \|\Delta a\|^2_{C([c,d])}\gamma^*. \quad (63)$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{e^{-x}}{2}(\omega_{tx})^2(T,x)\,dx \leq \frac{\gamma^*}{T^2}\|\Delta a\|^2_{C([c,d])}. \quad (64)$$

Тогда из (48), (50) получим

$$\|\Delta a\|_{C([c,d])} \leq \sqrt{5}\beta_0 e^{d/2}\frac{(1+r_0)}{\delta_0}\frac{\sqrt{2\gamma^*}}{T}\|\Delta a\|_{C([c,d])}. \quad (65)$$

Из условия леммы вытекает, что $a_1 = a_2$ на $[c,d]$.

Замечание 2. Условия теоремы единственности (равно как и теоремы существования) выполнены, если параметр s^* достаточно мал. Анализ величин α_i дает, что условия теорем 2, 3 выполнены, если $\mu \geq 0, \mu + \overline{\mu} \geq 0$ и параметр T достаточно большой. Кроме того, неравенства из условий теорем 2, 3 существенно упрощаются (равно как и оценки) при $\mu = 0$.

Алгоритм численного решения задачи

Берем в качестве оператора A_1 оператор ∂_x^2. Используем уравнение (40) и метод последовательных приближений для определении функции $a(x)|_{G_0}$, т. е. используем уравнение

$$a(x) = R_0(x) + S_0(a) = S(a), \quad (66)$$

$$R_0(x) = \frac{R(a(x)l_0(u_T) - l_1u_T) + l_1u_T}{l_0u_T} + S_0(a) = \frac{u_t(x,T) - R(u_t(x,T))}{l_0(u_T)}, \quad (67)$$

где u — решение задачи (2), (3) и $x \in (c,d)$. Соответствующее k-е приближение находится по правилу

$$a^k(x) = R_0(x) + S_0(a^{k-1}(x)). \quad (68)$$

В качестве начального приближения выбираем функцию a^0, совпадающую на $(-\infty,c) \cup (d,+\infty)$ с заданной функцией $a(x)$ и на (c,d) — с линейной функцией, принимающей в точках c,d заданные значения $a(c), a(d)$. Таким образом, алгоритм построения приближенного решения состоит в следующем: для уже построенного приближения $a^{k-1}(x)$ решаем прямую задачу (2), (3), где берем в качестве функции $a(x)$ функцию $a^{k-1}(x)$. Найдя решение прямой задачи $u(x)$, подставляем его в определение оператора S_0 и находим выражение $S_0(a^{k-1}(x))$, используя значение производной по времени от решения при $t = T$. Подставляя найденную функцию в (68), находим следующее приближение $a^k(x)$. При определенных условиях на данные задачи (см. условие из теоремы 2) процесс сходится к решению.

Опишем все построения более подробно.

1. Заменяем задачу (2), (3) на бесконечном интервале задачей на большом конечном промежутке $[-R, R]$. В качестве дополнительных краевых условий в точках $-R$, R берем однородные условия Неймана.

$$u_x(-R, t) = u_x(R, t) = 0. \tag{69}$$

2. Для удобства при решении прямой задачи записываем уравнение (2) в дивергентном виде

$$\rho(x)u_t - \partial_x(g(x)u_x) + \overline{\mu}\rho(x)u = 0, \tag{70}$$

где

$$g(x) = e^{-\int\limits_c^x \frac{a(\tau)+\mu}{a(\tau)}\, d\tau}, \quad \rho(x) = \frac{g(x)}{a(x)}. \tag{71}$$

Заменяем уравнение интегральным тождеством

$$(\rho(x)u_t, v) + (g(x)u_x, v_x) + (\overline{\mu}\rho(x)u, v(x)) = 0, \tag{72}$$

которое должно быть выполнено для всех пробных функций v из пространства $W_2^1(-R, R)$. Здесь скобки означают скалярное произведение в $L_2(-R, R)$.

3. Чтобы определить приближенное решение на k-м этапе, используем интегральное тождество

$$(\rho^{k-1}u_t, v) + (g^{k-1}u_x, v_x) + (\overline{\mu}\rho^{k-1}u, v(x)) = 0, \tag{73}$$

где функции ρ^{k-1}, g^{k-1} определяются через a^{k-1}. Для упрощения изложения вводим на интервале $[-R, R]$ равномерную сетку и считаем, что c, d являются ее узлами. Таким образом, узлами сетки являются числа $x_i = -R + ih$ ($h = 2R/n$) ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$) и $c = x_{i_1}$, $d = x_{i_2}$ ($i_1 < i_2$). Приближенное решение прямой задачи на k-м этапе ищем с помощью метода конечных элементов в виде

$$u^n(x, t) = \sum_{i=0}^{n} C_i(t)\varphi_i(x), \tag{74}$$

где $\varphi_i(x)$ — кусочно-линейные базисные функции из метода конечных элементов такие, что $\varphi_i(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \ldots, n$. Функции C_i определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\rho^{k-1}u_t^n, \varphi_j) + (g^{k-1}u_x^n, \varphi_j) + (\overline{\mu}\rho^{k-1}u^n, \varphi_j) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{75}$$

Ее можно записать в виде

$$KC_t + MC = 0, \quad C(0) = C_0 = (u_0(x_0), u_0(x_1), \dots, u_0(x_n))^T. \tag{76}$$

где K, M — матрицы масс и жесткости соответственно с элементами

$$K_{ij} = \int_{-R}^{R} \rho^{k-1}(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx, \quad i,j = 0,1,\dots,n,$$

$$M_{ij} = \int_{-R}^{R} g^{k-1}(x)\varphi_{ix}(x)\varphi_{jx}(x)\,dx + \overline{\mu}\int_{-R}^{R} \rho^{k-1}(x)\varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx.$$

Положим $\widetilde{a}^0 = (a_0, a_1, \dots, a_n)$, где $a_i = a(x_i)$ при $i = 0,1,\dots,i_1,i_2,i_2+1,\dots,n$, и $a_i = a_{i_1} + \frac{(ih-c)}{d-c}(a(d)-a(c))$ для $i = i_1+1,\dots,i_2-1$. Этому вектору отвечает кусочно-линейная функция $a_0(x) = a_i$ при $x \in (-R+(i-1)h, -R+ih]$. Предположим, что мы определили вектор $\widetilde{a}^{k-1} = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ (его значения для $i = 0,1,\dots,i_1,i_2,i_2+1,\dots,n$ совпадают с заданными значениями $a(x_i)$), ему также сопоставляется кусочно-постоянная функция $a^{k-1}(x) = a_i$ при $x \in [-R+(i-1)h, -R+ih)$ $i = 1,\dots,n$. Ищем вектор $\widetilde{g}^{k-1}$ с координатами $(g_0, g_1, \dots, g_n)$ в виде

$$g_j = exp\left(-\sum_{i=1}^{j}\left(1+\frac{\mu}{a_i}\right)h + \sum_{i=1}^{i_1}\left(1+\frac{\mu}{a_i}\right)h\right).$$

Ему отвечает соответствующая кусочно-постоянная функция g^{k-1}. Далее определяем вектор $\widetilde{\rho}^{k-1}$ и кусочно-постоянную функцию ρ^{k-1}. Имеем $\rho_j = g_j/a_j$. Далее используем построенные функции a^{k-1}, g^{k-1}, ρ^{k-1} для построения решения функции $u^n(t,x)$ по формуле (74) с использованием решения системы (76), которое ищется в виде

$$C(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \overrightarrow{C}^j e^{\lambda_j t}, \tag{77}$$

где λ_j — собственные значения пучка $M+\lambda K$, $\overrightarrow{C}^j$ — соответствующий собственный вектор и α_j — некоторые постоянные, определяемые из условий (3). Используем собственные векторы, обладающие тем свойством, что $(K\overrightarrow{C}^i, \overrightarrow{C}^j) = 0$ при $i \neq j$. Если $u_0^n = \sum_{j=0}^{n} u_0(x_i)\varphi_i$, — кусочно-линейное приближение функции u_0, то находим постоянные α_j, исходя из условия $u^n(0,x) = u_0^n$. Таким образом,

$$c_i(0) = u_0(x_i), \quad i = 0,1,\dots,n. \tag{78}$$

С другой стороны, если покоординатно запишем равенство (77), то получим

$$c_i(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j C_i^j e^{\lambda_j t}, \tag{79}$$

где C_i^j — i-я координата вектора $\overrightarrow{C}^j$. В частности,

$$c_i(0) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j C_i^j. \tag{80}$$

Таким образом, $\overrightarrow{c}(0) = C_0 = D\overrightarrow{\alpha}$, где D — матрица, по столбцам которой стоят векторы $\overrightarrow{C}^j$. Значит, чтобы найти вектор $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, надо обратить матрицу D. Обозначим матрицу, состоящую из векторов-столбцов $e^j = K\overrightarrow{C}^j$, через B. Умножим (80) на e_i^k и просуммируем полученные равенства по i. Получим

$$\sum_{i=0}^{n} e_i^k u_0(x_i) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j \sum_{i=0}^{n} C_i^j e_i^k. \tag{81}$$

Однако, поскольку $(K\overrightarrow{C}^i, \overrightarrow{C}^j) = 0$ при $i \neq j$, то

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^j e_i^k = 0,$$

при $j \neq k$ и

$$\sum_{i=0}^{n} C_i^j e_i^k = (K\overrightarrow{C}^j, \overrightarrow{C}^j)$$

при $j = k$. Тогда из (81) вытекает, что

$$\alpha_j = \frac{(K\overrightarrow{C}^j, C_0)}{(K\overrightarrow{C}^j, \overrightarrow{C}^j)}, \quad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{82}$$

Таким образом, имеем решение $u^n(t, x)$. Используем построенное решение для нахождения координат вектора $\widetilde{a}^k$. Полагаем для $j = i_1 + 1, \ldots, i_2 - 1$ (в соответствии с формулой (68))

$$a_j = R_0(x_j) + \frac{C_j'(T) - R_j}{l(u_T)(x_j)}, \quad R_j = C_{i_1}'(T) + \frac{(i - i_1)h}{i_2 - i_1}(C_{i_2}'(T) - C_{i_1}'(T)). \tag{83}$$

Обозначим координаты векторов a^{k-1}, a^k, которые ищем, через a_i^{k-1}, a_i^k ($i = i_1 + 1, \ldots, i_2 - 1$). На каждом этапе определяем величину

$$\varepsilon_k = \|a^{k-1} - a^k\| = \sum_{i=i_1+1}^{i_2-1} \left|a_i^k - a_i^{k-1}\right|.$$

Фиксируем малое число ε. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $\varepsilon_k < \varepsilon$.

Численное решение и результаты численных экспериментов

Для численного моделирования решения обратной задачи методом последовательных приближений был выбран математический пакет MatLab, так как в нем уже реализованы основные функции работы с матрицами, а также функции работы с интегралами.

В качестве области G был выбран отрезок $[-10, 10]$. В данных численных экспериментах условно считаем, что $0 \leq t \leq 5$. Для определенности возьмем равномерный шаг сетки для x, t, равный 0,1. В качестве отрезка $[c, d]$ был взят промежуток $[-1; 1]$.

В ходе численного моделирования решения обратной задачи методом последовательных приближений были рассмотрены примеры, показывающие, в частности, влияние величины параметра s^* на сходимость алгоритма, влияние выбора функции u_T, сходимость алгоритма в случае, когда данные возмущены случайной ошибкой.

1. Влияние величины параметра s^* на сходимость алгоритма.

(а) При входных данных $c = -1$, $d = 1$, $\mu = 0.1$, $r = -0.7$, $s^* = 0.001$ (или $s^* = 0.1$), $u_T = 2x + 4$ алгоритм сходится. Для простоты берем $a(x) = 3.8$ на промежутке $x \in [-R, c]$ и $a(x) = 4$ при $x \in [d, R]$. На рис. 1 представлен график $a(x)$ (эксперименты проведены при одинаковом количестве итераций):

Можно сделать вывод, что при увеличении константы s^* скорость сходимости алгоритма уменьшается и при значениях параметра примерно $s^* \geq 10$ алгоритм расходится.

2. Возмущение исходных данных u_T.

К правой части R_0 в основном уравнении (66) (см. также (68)) была добавлена случайная величина с нормальной функцией распределения, определяющаяся функцией rand() программы MatLab, величина возмущения 20%. При $c = -1$, $d = 1$, $\mu = 0.1$, $r = -0.7$, $s^* = 0.001$ и $u_T = 2\sin(x) + 4\cos(x + 0.15)$ получим результаты, представленные на рис. 2. Сплошной линией обозначен график функции a(x) без возмущений исходных данных, пунктирной — с возмущениями.

3. Проверка правильности работы алгоритма. Влияние возмущений данных. Используем следующую схему.

(а) Задаем коэффициент волатильности на интервале $[-R, R]$ (в том числе и на промежутке $[c, d]$).

(б) Решаем прямую задачу (2), (3).

(в) Находим значение $u_T = u|_{[c,d]}$.

(г) С заданной функцией u_T решаем обратную задачу (2), (3), (6) и сравниваем найденные значения $\overline{a}|_{[c,d]}$ с заданным значением $a|_{[c,d]}$.

Опишем результаты численного эксперимента. Пусть $a(x) = 0.1x + 3.9$ при $x \in [-1, 1]$, $a(x) = 3.8$ при $x \in (-\infty, -1]$ и $a(x) = 4$ при $x \in [1, +\infty)$. В соответствии с пп. (а)–(г) находим решение прямой задачи и функцию $u_T = u|_{[c,d]}$. Далее решаем обратную задачу. Для лучшей иллюстрации работы алгоритма к данным задачи (к функции R_0 в (66)) добавляем 20%-е возмущение и сравниваем результаты (представлены на рис. 3). Пунктиром обозначен график

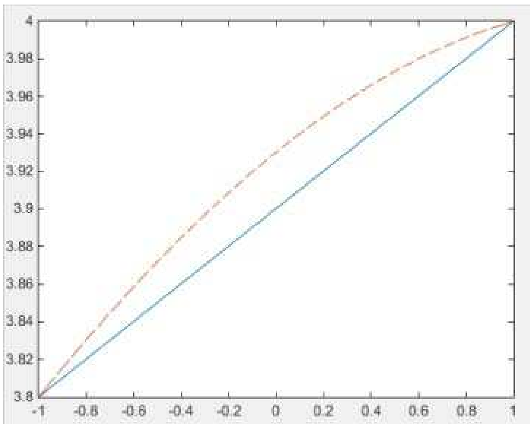

Рис. 1. График $a(x)$ при параметрах $s^* = 0.001$ и $s^* = 0.1$ (пунктиром) при одинаковом количестве итераций.

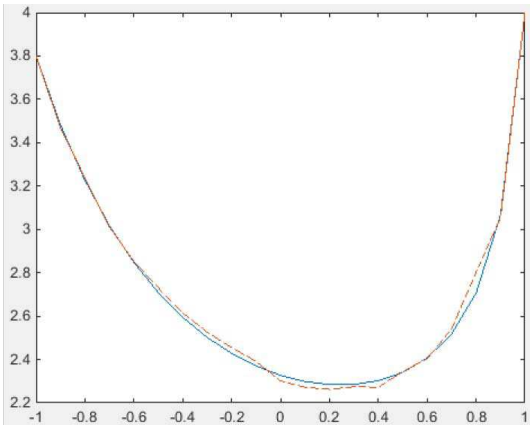

Рис. 2. График $a(x)$ при $u_T = 2\sin(x) + 4\cos(x + 0.15)$.

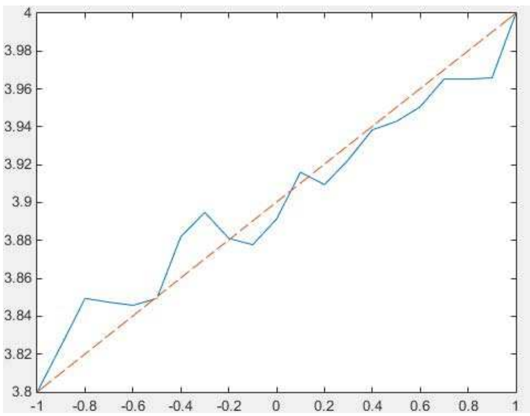

Рис. 3. Результат работы алгоритмов.

функции $a(x)$, найденной первоначальным способом, без возмущений исходных данных, линией — результат работы алгоритма по пп. (а)–(г) с возмущениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Black F., Scholes M.* The pricing of options and corporate liabilities // J. Political Econ. 1973. V. 81. P. 637–679.

2. *Isakov V.* The inverse problem of option pricing // Recent Developments in Theory and Numerics. International Conference on Inverse Problems. City University of Hong Kong. 2002. P. 47–55.

3. *Bouchouev I., Isakov V.* Uniqueness, stability, and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets // Inv. Probl. 1999. V. 15. P.95–116.

4. *Liu Y., Liu X.* Identifying the implied volatility using the total variation regularization // Boundary Value Probl. 2018. 8 (2018). URL: https://doi.org/10.1186/s13661-018-0926-x R.

5. *Isakov V.* Inverse problems for partial differential equations // Berlin: Springer-Verl. 2017. (Appl. Math. Sci.; V. 127).

6. *Avellaneda M, Friedman C., Holmes R, Sampieri L.* Calibrating volatility surfaces via relative entropy minimization // Appl. Math. Finance. 1997. V. 4. P. 37–64.

7. *Berestycki H, Busca J., Florent I.* An inverse parabolic problem arising in finance // C. R. Acad. Sci. Paris. 2000. V. 331. P. 965–969.

8. *Bouchouev I., Isakov V., Valdivia N.* Recovery of volatility coefficient by linearization // Quant. Finance. 2002. V. 2. P. 257–263.

9. *Lishang J., Youshan T.* Identifying the volatility of underlying assets from option prices // Inv. Probl. 2001. V. 17. P. 137–155.

10. *Isakov V.* Recovery of time dependent volatility coefficient by linearization // Evolution Equ. Control Theory. 2014. V. 3, N 1. P. 119–134.

11. *Isakov V. M., Kabanikhin S. I., Shananin A. A., Shishlenin M. A., Zhang S.* Algorithm for determining the volatility function in the Black–Scholes model // Comput. Mathematics Math. Phys. 2019. V. 59, N 10. P. 1753–1758.

12. *Shidfar A., Paryab K., Yazdanian A.R.* On Tikhonov regularization method in calibration of volatility term-structure // Inf. Sci. Lett. 2013. V. 2, N 2. P. 93–100.

13. *Hoffman B. Kramer R.* On maximum entropy regularization for a specific inverse problem of option pricing // J. Inv. Ill-Posed Probl. 2005. V. 13, N 1. P. 41–63.

14. *Hofmann C., Hofmann B., Pichler A.* Simultaneous identification of volatility and interest rate functions – a two-parameter regularization approach // Electron. Trans. Numer. Anal. 2019. V. 51. P. 99–117.

15. *Wang S.-L., Yang Yu-F., Zeng Yu-H.* The adjoint method for the inverse problem of option pricing // Math. Probl. Engin. 2014. V. 2014, Article ID 314104, 7 pages. URL: http://dx.doi.org/10.1155/2014/314104

16. *Zhang R. Y. Xu F. F., Huang J. C.* Reconstructing local volatility using total variation // Acta Math. Sinica. 2017. V. 33. P. 263–277.

17. *Hein T., Hofmann B.* On the nature of ill-posedness of an inverse problem in option pricing // Inv. Probl. 2003. V. 19. P. 1319–1338.

18. *Albani V., Zubelliy J. P.* A splitting strategy for the calibration of lump-diffusion models // URL: https://arxiv.org/pdf/1811.02028.pdf.

19. *Lakhal A., Lakhal M. M., Louis A. K.* Calibrating local volatility in inverse option pricing using the Levenberg–Marquardt method // J. Inv. Ill-Posed Probl. 2010. V. 18. P. 493–514.

20. *Crepey S.* Calibration of the local volatility in a generalized Black–Scholes model using Tikhonov regularization // SIAM J. Math. Anal. 2003. V. 34. P. 1183–1206.

21. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным переопределением // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 4. С. 49–68.

22. *Соловьев В. В.* О разрешимости обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке для параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 9. С. 1577–1583.

23. *Pyatkov S. G.* Inverse problems for the Black–Scholes equation and related problems // J. Inv. Ill-Posed Prob. 2007. V. 15, N 9. P. 955–974.

24. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutsch. Verl. Wissensch., 1978.

25. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

26. *Denk R., Hieber M., and Prüss J.* R-boundedness, Fourier multipliers, and problems of elliptic and parabolic type // Mem. Amer. Math. Soc. 2003. V.166, no. 788.

27. *Amann H.* Linear and quasilinear Parabolic Problems. Basel, etc.: Birkhäuser Verl. 1995. (Monogr. Math.; V. 89).

Поступила в редакцию 31 марта 2021 г.
После доработки 19 мая 2021 г.
Принята к публикации 26 августа 2021 г.

Пятков Сергей Григорьевич, Орлова Дарья Сергеевна
Югорский государственный университет,
ул. Чехова, 16, Ханты-Мансийск 628011
s_pyatkov@ugrasu.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

UDC 517.95

ON SOME INVERSE PROBLEMS FOR THE BLACK—SCHOLES EQUATION

S. G. Pyatkov and D. S. Orlova

Abstract: We consider the inverse problem of recovering the volatility coefficient depending on the spatial variable with given additional information in the form of conditions of partial final overdetermination. Existence and uniqueness theorems for solutions to this problem are proven, the numerical algorithm is developed, and the results of numerical experiments are presented.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.27.57.004

Keywords: Black–Scholes equation, inverse problem, volatility coefficient.

REFERENCES

1. *Black F. and Scholes M.*, "The pricing of options and corporate liabilities," J. Political Econ., **81**, 637–679 (1973).
2. *Isakov V.*, "The inverse problem of option pricing," Recent Development in Theories and Numerics, Proc. Int. Conf. Inverse Problems (Hong Kong, China, Jan. 9–12, 2002), pp. 47–55, World Sci. (2002).
3. *Bouchouev I. and Isakov V.*, "Uniqueness, stability, and numerical methods for the inverse problem that arises in financial markets," Inverse Probl., **15**, 95–116 (1999).
4. *Liu Y. and Liu X.*, "Identifying the implied volatility using the total variation regularization," Bound. Value Probl., **2018**, 8 (2018).
5. *Isakov V.*, Inverse Problems for Partial Differential Equations, Springer-Verl., Berlin (2017) (Appl. Math. Sci.; vol. 127).
6. *Avellaneda M., Friedman C., Holmes R., and Sampieri L.*, "Calibrating volatility surfaces via relative entropy minimization," Appl. Math. Finance, **4**, 37–64 (1997).
7. *Berestycki H., Busca J., and Florent I.* "An inverse parabolic problem arising in finance," C. R. Acad. Sci. Paris, **331**, 965–969 (2000).
8. *Bouchouev I., Isakov V., and Valdivia N.*, "Recovery of volatility coefficient by linearization," Quant. Finance, **2**, 257–263 (2002).
9. *Lishang J. and Youshan T.*, "Identifying the volatility of underlying assets from option prices," Inverse Probl., **17**, 137–155 (2001).
10. *Isakov V.*, "Recovery of time dependent volatility coefficient by linearization," Evolution Equ. Control Theory, **3**, No. 1, 119–134 (2014).
11. *Isakov V. M., Kabanikhin S. I., Shananin A. A., Shishlenin M. A., and Zhang S.*, "Algorithm for determining the volatility function in the Black–Scholes model," Comput. Math. Math. Phys., **59**, No. 10, 1753–1758 (2019).
12. *Shidfar A., Paryab K., and Yazdanian A. R.*, "On Tikhonov regularization method in calibration of volatility term-structure," Inf. Sci. Lett., **2**, No. 2, 93–100 (2013).
13. *Hoffman B. and Kramer R.*, "On maximum entropy regularization for a specific inverse problem of option pricing," J. Inverse Ill-Posed Probl., **13**, No. 1, 41-63 (2005).
14. *Hofmann C., Hofmann B., and Pichler A.*, "Simultaneous identification of volatility and interest rate functions – a two-parameter regularization approach," Electron. Trans. Numer. Anal., **51**, 99–117 (2019).

15. *Wang S.-L., Yang Yu-F., and Zeng Yu-H.*, "The adjoint method for the inverse problem of option pricing," Math. Probl. Eng., **2014**, Article ID 314104 (2014).
16. *Zhang R. Y., Xu F. F., and Huang J. C.*, "Reconstructing local volatility using total variation," Acta Math. Sin., **33**, No. 2, 263–277 (2017).
17. *Hein T. and Hofmann B.*, "On the nature of ill-posedness of an inverse problem in option pricing," Inverse Probl., **19**, 1319–1338 (2003).
18. *Albani V. and Zubelli J.*, "A splitting strategy for the calibration of jump-diffusion models," arxiv:1811.02028. URL: https://arxiv.org/pdf/1811.02028.pdf
19. *Lakhal A., Lakhal M. M., and Louis A. K.*, "Calibrating local volatility in inverse option pricing using the Levenberg–Marquardt method," J. Inverse Ill-Posed Probl., **18**, 493–514 (2010).
20. *Crepey S.*, "Calibration of the local volatility in a generalized Black–Scholes model using Tikhonov regularization," SIAM J. Math. Anal., **34**, No. 5, 1183–1206 (2003).
21. *Prilepko A. I. and Kostin A. B.*, "About some inverse parabolic problems with final and integral overdetermination," Sb. Math., **183**, No. 4, 49–68 (1992).
22. *Solovyev V. V.*, "On solvability of inverse problem of determination the source with overdetermination on the top cover for the parabolic equation," Differ. Equ., **25**, No. 9, 1577–1583 (1989).
23. *Pyatkov S. G.*, "Inverse problems for the Black-Scholes equation and related problems," J. Inverse Ill-Posed Probl., **15**, No. 9, 955–974 (2007).
24. *Triebel H.*, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, VEB Deutsch. Verl. Wiss., Berlin (1978).
25. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Ural'tseva N. N.*, Linear and Quasilinear Parabolic Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1967).
26. *Denk R., Hieber M., and Prüss J.*, "R-boundedness, Fourier multipliers, and problems of elliptic and parabolic type," Mem. Amer. Math. Soc., **166**, No. 788 (2003).
27. *Amann H.*, Linear and Quasilinear Parabolic Problems, I, Birkähuser-Verl., Basel (1995) (Monogr. Math.; vol. 89).

Submitted March 03, 2021
Revised May 19, 2021
Accepted August 26, 2021

Sergey G. Pyatkov
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiysk 628011, Russia
`s_pyatkov@ugrasu.ru`

Daria S. Orlova
Yugra State University,
16 Chekhov Street, Khanty-Mansiysk 628011, Russia
`longplaying96@gmail.com`