Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

УДК 514.755.5

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ρ–МЕРНЫХ КОМПЛЕКСОВ $C^\rho(1,1)$ m–МЕРНЫХ ПЛОСКОСТЕЙ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P^n

И. В. Бубякин, И. В. Гоголева

Аннотация. Предметом исследования настоящей статьи является дифференциальная геометрия ρ-мерных комплексов C^ρ m-мерных плоскостей в проективном пространстве P^n, содержащих конечное число торсов, для которых $n-m$ различных торсов имеют одну общую $(m+1)$-мерную касательную плоскость к торсу, при этом те же $n-m$ различных торсов имеют одну общую характеристическую $(m-1)$-мерную характеристическую плоскость, общую для двух бесконечно близких образующих торса. Настоящая работа относится к исследованиям в области проективной дифференциальной геометрии на основе метода подвижного репера Э. Картана и метода внешних дифференциальных форм. Эти методы позволяют с единой точки зрения изучать дифференциальную геометрию подмногообразий различных размерностей грассманова многообразия, а также обобщить полученные результаты на более широкие классы многообразий многомерных плоскостей. Для изучения таких подмногообразий применяется грассманово отображение многообразия $G(m,n)$ на $(m+1)(n-m)$-мерное алгебраическое многообразие $\Omega(m,n)$ пространства P^N, где $N=\binom{n+1}{m+1}-1$.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.25.88.001

Ключевые слова: грассманово многообразие, комплексы многомерных плоскостей, многообразие Сегре.

1. Введение

В монографии [1] М. А. Акивисом и В. В. Гольдбергом исследуется теория подмногообразий в многомерном проективном пространстве. В частности, рассматриваются подмногообразия грассмановых многообразий. В работе [2] М. А. Акивисом и В. В. Гольдбергом изучаются многообразия с вырожденным гауссовым отображением, эти многообразия являются аналогами торсов или развертывающихся поверхностей трехмерного евклидова пространства. В последнее время многообразия с вырожденным гауссовым отображением изучаются как с проективной точки зрения, так и с евклидовой. М. А. Акивис и В. В. Гольдберг написали монографию [3] по проективной дифференцильной геометрии, в которой излагаются фундаментальные результаты. Например, что многообразия с вырожденным гауссовым отображением включают в себя не только конусы и торсы, но и достаточно широкий класс гиперповерхностей, которые не являются конусами или торсами. В своих рассуждениях М. А. Акивис и В. В. Гольдберг систематически используют фокальные образы: фокальные гиперповерхности и фокальные конусы, ассоциированные с многообразием с вырожденным гауссовым отображением. Это позволяет авторам более глубоко изложить дифференциальную геометрию исследуемых многообразий и провести полную их классификацию.

М. А. Акивисом и В. В. Гольдбергом написана фундаментальная монография [4], в которой наряду с глубоким изучением дифференциальной геометрии конформного и псевдоконформного пространств произвольной размерности и подмногообразий в этих пространствах основательно исследуется дифференциальная геометрия грассмановых многообразий, многообразий с грассмановой структурой и многообразий с почти грассмановой структурой. Почти грассманову структуру М. А. Акивис рассматривает как расслоение конусов Сегре на многообразии. Результаты, полученные в этой монографии, имеют фундаментальный характер по проективной и конформной дифференциальным геометриям. Эти результаты являются классическими — настолько они глубоки как по содержанию, так и по форме и полноте изложения.

Указанное определение почти грассмановой структуры использовали в дальнейшем в интегральной геометрии Радона — Хелгасона И. М. Гельфанд и С. П. Гиндикин в монографии [5], а также в других своих работах, решая основную задачу интегральной геометрии для n-мерных допустимых комплексов прямых и n-мерных допустимых комплексов m-плоскостей в проективном пространстве P^n. Полученные И. М. Гельфандом и С. П. Гиндикиным формулы обращения лежат в основе компьютерной томографии. Такие задачи были положены в основу начала послойного изображения внутренней структуры исследуемого объекта. В том числе в этих исследованиях были получены новейшие научные достижения: в 2003 г. за изображения метода магнито-резонансной томографии — способа получения томографических послойных изображений для исследования внутренних органов и тканей человека — Нобелевскую премию по физиологии и медицине получили Мэнсфилд и Лотербур. Всего десять лет назад в 2010 г. была создана четырехмерная электронная томография — техника визуализирования динамики трехмерных объектов во времени. Эта техника позволяет наблюдать за пространственно-временными характеристиками микрообъектов.

Таким образом, М. А. Акивис и В. В. Гольдберг открывают новое поле исследований в проективной дифференциальной геометрии, в частности, дифференциальной геометрии подмногообразий грассманова многообразия, которая успешно развивается и применяется в настоящее время. Актуальность таких исследований заключается в том, что дифференциальная геометрия подмногообразий грассманова многообразия расширяет теорию грассмановых многообразий [6–9], связана с исследованиями лагранжевых и квантовых многообразий [10, 11], а также применяется в теоретической физике [12, 13].

Предметом исследования настоящей статьи является дифференциальная геометрия ρ-мерных комплексов C^ρ m-мерных плоскостей в проективном пространстве P^n, содержащих конечное число торсов, для которых $n-m$ различных торсов имеют одну общую $(m+1)$-мерную касательную плоскость к торсу и при этом $m+1$ различных торсов имеют одну общую $(m-1)$-мерную характеристическую плоскость, общую для двух бесконечно близких образующих торса. Заметим, что некоторые классы допустимых комплексов [5] из изучаемых комплексов m-мерных плоскостей исследовались в работе [14]. Настоящая работа относится к исследованиям в области проективной дифференциальной геометрии на основе метода подвижного репера Э. Картана и метода внешних дифференциальных форм [1]. Эти методы позволяют с единой точки зрения изучать дифференциальную геометрию подмногообразий различных размерностей грассманова многообразия, а также обобщить полученные результаты на более широкие классы многообразий многомерных плоскостей. Основная задача дифференциальной геометрии подмногообразий грассмановых многообразий заключается в проведении единой классификации различных классов таких многообразий, выяснения их строения, и связанная с этим задача определения произвола их существования, а также изучение свойств подмногообразий различных классов. Данные исследования являются продолжением работ [15–19]. Для изучения таких подмногообразий применяется грассманово отображение многообразия $G(m,n)$ на $(m+1)(n-m)$-мерное алгебраическое многообразие $\Omega(m,n)$ пространства P^N, где $N=\binom{n+1}{m+1}-1$. Заметим, что в дифференциальной геометрии подмногообразий грассманова многообразия операцию суммирования будем производить по правилу Эйнштейна, как это принято в тензорном анализе, в частности, в его приложениях к общей теории относительности.

М. А. Акивис отмечает, что пересечение алгебраического многообразия $\Omega(m,n)$ с его касательным пространством $T_l\Omega(m,n)$ представляет собой конус Сегре $C(m+1,n-m)$. Этот конус имеет размерность n и несет плоские образующие размерностей $n-m$ и $m+1$, пересекающиеся по прямым. Проективизация $PB_l(2)$ этого конуса есть многообразие Сегре $S(m,n-m-1)=P^m\times P^{n-m-1}$. Многообразие Сегре $S(m,n-m-1)$ инвариантно при проективных преобразованиях пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}=PT_l\Omega(m,n)$, являющегося проективизацией с центром в точке l касательного пространства $T_l\Omega(m,n)$ к алгебраическому многообразию $\Omega(m,n)$, и его будем использовать для классификации рассматриваемых подмногообразий грассманова многообразия $G(m,n)$, а также для интерпретации их свойств в терминах проективных алгебраических многообразий. Классификация подмногообразий грассманова многообразия $G(m,n)$ основывается на различных конфигурациях плоскости $P^{(n-m)(m+1)-1}=PT_l\Omega(m,n)$ и многообразия Сегре $S(m,n-m-1)$.

Так как дифференциальная геометрия грассмановых многообразий далеко еще не изучена, такой методологический подход к их исследованию представляется актуальным. Следует заметить, что дифференциальная геометрия грассмановых многообразий представляет самостоятельный интерес для дифференциальной геометрии, а также одновременно является одним из важных средств построения и изучения других многообразий в проективных пространствах. Одной из наиболее красивых областей дифференциальной геометрии, где во всей полноте проявляются преимущества инвариантных бескоординатных методов исследования, является теория комплексов многомерных плоскостей проективного пространства [14].

2. Характеристические $(m-1)$- и $(m+1)$-мерные плоскости торсов, принадлежащих ρ-мерному комплексу C^ρ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n

Рассмотрим в проективном пространстве P^n ρ-мерные комплексы C^ρ m-мерных плоскостей, содержащих конечное число торсов — развертывающихся поверхностей. Условие, при котором комплексы C^ρ содержат конечное число торсов, определяется из следующих рассуждений. Рассмотрим проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(m,n)$ с центром в точке l. Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m,n)$. В этом проективном пространстве должно выполняться следующее равенство:

$$\dim PT_lV^\rho + \dim S_l(m, n-m-1) \\ = \dim P^{(m+1)(n-m)-1} + \dim(PT_lV^\rho \cap S_l(m, n-m-1)).$$

Если размерность пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$ равна r, то

$$(\rho - 1) + (m + (n-m-1)) = (m+1)(n-m) - 1 + r.$$

Отсюда следует, что

$$\rho - 1 = m(n-m-1) + r.$$

Утверждение, что комплекс C^ρ m-мерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов, означает равенство нулю размерности пересечения плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1)$, т. е. $r = 0$. Если $r = 0$, то искомую зависимость размерности комплекса C^ρ, его m-мерной образующей и проективного пространства P^n получаем в виде

$$\rho - 1 = m(n-m-1).$$

Таким образом, комплекс C^ρ m-мерных плоскостей в проективном пространстве P^n содержит конечное число торсов тогда и только тогда, когда размерность комплекса C^ρ, его m-мерной образующей и проективного пространства P^n связаны этим соотношением.

Комплексу C^ρ при грассмановом отображении [20, 21] соответствует ρ-мерное многообразие V^ρ, лежащее на алгебраическом многообразии $\Omega(m,n)$, являющемся образом многообразия $G(m,n)$ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n. В каждой своей точке l, соответствующей m-мерной плоскости L

проективного пространства P^n, многообразие V^ρ имеет ρ-мерную касательную плоскость T_lV^ρ. Проективизация касательной плоскости T_lV^ρ с центром в точке l представляет собой $(\rho-1)$-мерную проективную плоскость PT_lV^ρ. Различным видам взаимного расположения плоскости PT_lV^ρ и инвариантного многообразия Сегре $S_l(m, n-m-1) = P^m \times P^{n-m-1}$, являющимся проективизацией асимптотического конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка, соответствуют различные классы комплексов $C^\rho \subset G(m,n)$. При этом конус $B_l(2)$ есть конус Сегре $C(m+1, n-m)$ и представляет собой пересечение алгебраического многообразия $\Omega(m,n)$ и его касательного пространства $T_l\Omega(m,n)$, т. е.

$$B_l(2) = \Omega(m,n) \cap T_l\Omega(m,n).$$

В проективном пространстве P^n рассмотрим семейство точечных реперов A_I $(I,J,K = 0,1,\ldots,n)$ и семейство реперов, образованных гиперплоскостями $\alpha^I = (-1)^I(A_0,\ldots,A_{I-1},A_{I+1},\ldots,A_n)$. Уравнения перемещения этих реперов имеют вид

$$dA_I = \omega_I^J A_J, \quad d\alpha^I = -\omega_J^I \alpha^J,$$

где ω_I^J — линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие структурным уравнениям проективного пространства P^n:

$$d\omega_I^J = \omega_I^K \wedge \omega_K^J.$$

Пусть L — m-мерная плоскость пространства P^n. Свяжем с этой плоскостью семейство точечных реперов так, чтобы точки A_i, $i = (0,1,\ldots,m)$, принадлежали плоскости L. Тогда

$$dA_i = \omega_i^j A_j + \omega_i^p A_p, \quad dA_p = \omega_p^i A_i + \omega_p^q A_q,$$

где $i,j = 0,1,\ldots,m$ и $p,q = m+1, m+2,\ldots,n$. Отсюда видно, что m-мерная плоскость L в пространстве P^n зависит от $(m+1)(n-m)$ параметров, линейными комбинациями дифференциалов которых являются формы ω_i^p. На многообразии $\Omega(m,n)$ асимптотические направления второго порядка, выходящие из точки l, определяются условием

$$d^2 l = 0 (\operatorname{mod} T_l\Omega(m,n)).$$

Отсюда следует, что уравнения конуса $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка имеют вид

$$\omega_i^p \omega_j^q - \omega_i^q \omega_j^p = 0. \tag{1}$$

Из этих уравнений видно, что координаты ω_i^p точки конуса $B_l(2)$ допускают параметрическое представление

$$\omega_i^p = a_i x^p. \tag{2}$$

Поэтому конус $B_l(2)$ асимптотических направлений второго порядка совпадает с конусом Сегре $C_l(m+1, n-m)$.

Рассмотрим теперь проективизацию касательной плоскости $T_l\Omega(m,n)$ с центром в точке l. Эта проективизация представляет собой проективное пространство $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m,n)$, в котором формы ω_i^p являются однородными координатами произвольной точки. При проективизации асимптотическому конусу $B_l(2)$ соответствует многообразие Сегре $S_l(m,n-m-1)$ проективного пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$, определяемого теми же уравнениями (1), что и конус $B_l(2)$ в касательном пространстве $T_l\Omega(m,n)$. Многообразие Сегре $S_l(m,n-m-1)$ представляет собой $((m+1)(n-m)-1)-m(n-m-1)=(n-1)$-мерную алгебраическую поверхность порядка $\binom{n-1}{m}=\binom{n-1}{n-m-1}$ [22, 23], несущую два семейства плоских образующих размерностей m и $n-m-1$, зависящих соответственно от $n-m-1$ и m параметров. При этом две образующие, принадлежащие различным семействам, имеют общую точку, а две образующие, принадлежащие одному семейству, не пересекаются. Через каждую его точку проходит по одной образующей из каждого семейства.

Многообразие Сегре $S_l(m,n-m-1)$ остается инвариантным при проективных преобразованиях пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$. Плоскость PT_lV^ρ в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m,n)$ определяется теми же уравнениями, что и касательная плоскость T_lV^ρ в касательном пространстве $T_l\Omega(m,n)$. Поскольку на комплексе C^ρ m-мерная плоскость L зависит от ρ параметров, то среди форм ω_i^p лишь ρ линейно независимых. Следовательно, комплекс C^ρ задается $n-1$ $(\alpha=1,2,\ldots,n-1)$ дифференциальными уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i}\omega_i^p = 0, \tag{3}$$

где ω_i^p — линейные диффереciальные формы, обращение в нуль которых фиксирует m-мерную плоскость L на комплексе C^ρ.

Рассмотрим однопараметрическое семейство m-мерных плоскостей L в пространстве P^n. Такое семейство представляет собой $(m+1)$-мерную поверхность с m-мерными плоскими образующими. Эта поверхность называется *торсом* [3, 4], если она является тангенциально вырожденной поверхностью ранга один. Торсу на алгебраическом многообразии $\Omega(m,n)$ соответствует кривая, касательные к которой служат прямолинейными образующими этого многообразия. Данная кривая является асимптотической линией многообразия $\Omega(m,n)$, поэтому в произвольной точке этой линии выполняются уравнения (1). Следовательно, дифференциальные уравнения торсов в пространстве P^n можно записать в виде

$$\omega_i^p = a_i x^p dt. \tag{4}$$

Каждый торс, проходящий через m-мерную плоскость L, определяет на ней характеристическую $(m-1)$-мерную плоскость, которая является пересечением двух бесконечно близких образующих, и характеристическую $(m+1)$-мерную плоскость, касательную плоскость к торсу. Найдем уравнения характеристических образов торсов. Пусть $M = x^iA_i$ $(i=0,1,\ldots,m)$ — произвольная точка m-мерной плоскости L. Дифференциал этой точки в силу (4) вычисляется так:

$$dM = \big(dx^i + x^j\omega_j^i\big)A_i + (a_ix^i)(x^pA_p)dt,$$

где $p = m+1, m+2, \ldots, n$. Отсюда видно, что характеристическая $(m-1)$-мерная плоскость в m-мерной плоской образующей L комплекса C^{ρ}, определяется уравнением

$$a_i x^i = 0,$$

а характеристическая $(m+1)$-мерная плоскость, содержащая m-мерную плоскую образующую L комплекса C^{ρ}, определяется m-мерной плоскостью L и точкой:

$$S = x^p A_p.$$

Из уравнений (3) ввиду (4) получим систему следующих уравнений:

$$\Lambda_p^{\alpha i} a_i x^p = 0, \tag{5}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$. Эта система уравнений определяет характеристическую $(m-1)$-мерную плоскость торса, принадлежащего комплексу C^{ρ}, если выполняется условие

$$\operatorname{rang}\left(\Lambda_p^{\alpha i} a_i\right) = n - m - 1. \tag{6}$$

Из этого соотношения определяются характеристические $(m-1)$-мерные плоскости в m-мерной образующей L комплекса C^{ρ}. Условие

$$\operatorname{rang}\left(\Lambda_p^{\alpha i} x^p\right) = m + 1 \tag{7}$$

определяет точки S пересечения характеристических $(m+1)$-мерных плоскостей с аффинно двойственной к m-мерной плоскости L в пространстве P^n $(n-m)$-мерной плоскостью. Эти точки вместе с m-мерной плоскостью L определяют $(m+1)$-мерные характеристические плоскости торса.

3. К дифференциальной геометрии $\boldsymbol{\rho}$-мерных комплексов $\boldsymbol{C^{\rho}(1,1)}$ $\boldsymbol{m}$-мерных плоскостей проективного пространства $\boldsymbol{P^n}$

В проективном пространстве P^n рассмотрим ρ-мерный комплекс C^{ρ} ($\rho = m(n-m-1)+1$) m-мерных плоскостей L, для которого $n-m$ различных торсов, принадлежащих этому комплексу C^{ρ}, имеют общую характеристическую $(m+1)$-мерную плоскость, касательную к торсу, и те же $n-m$ различных торсов, принадлежащих этому комплексу C^{ρ}, имеют общую характеристическую $(m-1)$-мерную плоскость, по которой пересекаются две их соседние образующие. Обозначим рассматриваемые комплексы через $C^{\rho}(1,1)$. Свяжем с комплексами $C^{\rho}(1,1)$ репер так, чтобы плоскости $A_1 \wedge \cdots \wedge A_m$, $A_0 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m, \ldots,$ $A_0 \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_{m-1}$ совместились с $(m-1)$-мерными характеристическими плоскостями, по которым пересекаются две бесконечно близкие образующие торса $n-m$ различных торсов. Общую $(m+1)$-мерную характеристическую плоскость этих торсов совместим с плоскостью $A_0 \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge A_n$. Ввиду этого из (5) получим, что

$$\Lambda_n^{\alpha i} = 0, \tag{8}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$, $i = 0, 1, \ldots, m$ и n фиксировано.

Выберем репер также так, чтобы плоскости $A_0 \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge A_{m+1}, A_0 \wedge \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge A_{m+2}, \ldots, A_0 \wedge A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \wedge A_n$ совместились с $(m+1)$-мерными характеристическими плоскостями, совпадающими с касательными плоскостями $n-m$ различных торсов. Общую $(m-1)$-мерную характеристическую плоскость этих торсов совместим с плоскостью $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_m$. Ввиду этого из (5) получим, что

$$\Lambda_p^{\alpha 0} = 0, \tag{9}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$ и $p = m+1, m+2, \ldots, n$.

Специализация репера позволяет выбрать линейные дифференциальные формы ω_0^p и формы ω_i^n в качестве базисных на комплексе $C^\rho(1,1)$. Дополним данные линейные формы до базиса комплекса $C^\rho(1,1)$ линейными формами Θ^τ, где $\tau = 1, 2, \ldots,\ \rho - n = m(n-m-1) + 1 - n$.

Рассмотрим комплексы $C^\rho(1,1)$, которые ввиду специализации репера определяются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\Lambda_r^{\alpha k} \omega_k^r = 0, \tag{10}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $r = m+1, m+2, \ldots, n-1$. Уравнения (10) можно записать в параметрическом виде:

$$\omega_k^r = \lambda_{k\tau}^r \Theta^\tau. \tag{11}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (10), получим независимые квадратичные уравнения:

$$d\Lambda_r^{\alpha k} \wedge \omega_k^r + \Lambda_r^{\alpha k}\big(\omega_k^0 \wedge \omega_0^r + \omega_k^l \wedge \omega_l^r + \omega_k^s \wedge \omega_s^r + \omega_k^n \wedge \omega_n^r\big) = 0, \tag{12}$$

где $k, l = 1, 2, \ldots, m; r, s = m+1, m+2, \ldots, n-1$. Ввиду (11) будем иметь

$$\big(\lambda_{k\tau}^r d\Lambda_r^{\alpha k} + \lambda_{l\tau}^r \Lambda_r^{\alpha k} \omega_k^l - \lambda_{k\tau}^s \Lambda_r^{\alpha k} \omega_s^r\big) \wedge \Theta^\tau + \Lambda_r^{\alpha k} \omega_k^0 \wedge \omega_0^r - \Lambda_r^{\alpha k} \omega_n^r \wedge \omega_k^n = 0. \tag{13}$$

Отсюда находим

$$\omega_k^0 = 0 \pmod{\Theta^\tau}, \quad \omega_n^k = 0 \pmod{\Theta^\tau}. \tag{14}$$

Дифференцируя внешним образом эти уравнения, получаем

$$\omega_k^n \wedge \omega_n^0 = 0 \pmod{\Theta^\tau}, \tag{15}$$

$$\omega_n^0 \wedge \omega_0^k = 0 \pmod{\Theta^\tau}. \tag{16}$$

Следовательно,

$$\omega_n^0 = 0. \tag{17}$$

Итак, имеем

$$\omega_k^0 = \lambda_{k\tau}^0 \Theta^\tau, \quad \omega_n^r = \lambda_{n\tau}^r \Theta^\tau, \quad \omega_n^0 = \lambda_{n\tau}^0 \Theta^\tau. \tag{18}$$

Таким образом, m-мерная плоскость $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_n$ описывает некоторое τ-мерное многообразие, где $\tau = \rho - n = m(n-m-1)+1-n = (m-1)(n-1)-m^2$.

Докажем обратное утверждение. Рассмотрим произвольное τ-мерное многообразие m-мерных плоскостей. Точки $A_1, A_2, \dots, A_m, A_n$ поместим в текущую m-мерную плоскость рассматриваемого многоообразия. Перемещение m-мерной образующей τ-мерного многообразия определяется формами ω_k^0, ω_k^r, ω_n^r, ω_n^0, где $k = 1, 2, \dots, m$; $r = m+1, m+2, \dots, n-1$. Поскольку рассматриваемое многообразие представляет собой τ-параметрическое семейство m-мерных плоскостей, формы ω_k^r должны выражаться через τ линейно независимых форм Θ^τ:

$$\omega_k^r = \lambda_{k\tau}^r \Theta^\tau, \tag{19}$$

где $\tau = 1, 2, \dots, (m-1)(n-1) - m^2$. Совокупность m-мерных плоскостей, пересекающих m-мерную плоскость $A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_m \wedge A_n$ некоторого τ-мерного многообразия, образует $\rho = (\tau+n)$-параметрическое семейство. Следовательно, m-мерные плоскости, проходящие через все $(m-1)$-мерные плоскости τ-мерного многообразия, образуют ρ-мерный комплекс C^ρ.

Покажем, что построенный комплекс является комплексом $C^\rho(1,1)$. Поместим вершины $A_0, A_1, \dots, A_m$ в текущую m-мерную плоскость комплекса C^ρ. Тогда, исключая из дифференциальных уравнений (19) формы Θ^τ, получим $m(n-m-1) - \tau = n-1$ линейных однородных уравнений, связывающих формы ω_k^r, которые можно записать в виде

$$\Lambda_r^{\alpha k} \omega_k^r = 0. \tag{20}$$

где $\alpha = 1, 2, \dots, n-1$, $k = 1, 2, \dots, m$, $r = m+1, m+2, \dots, n-1$. Отсюда следует, что выполняются соотношения (8) и (9). Значит, построенный комплекс является комплексом $C^\rho(1,1)$.

Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. *Комплекс C^ρ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащий конечное число торсов, является комплексом $C^\rho(1,1)$ тогда и только тогда, когда его m-мерные образующие пересекают m-мерные плоскости некоторого $((m-1)(n-1)-m^2)$-мерного многообразия по $(m-1)$-мерным плоскостям.*

Изображение комплексов $C^\rho(1,1)$ на алгебраическом многообразии $\Omega(m,n)$ выясняет следующая теорема.

Теорема 2. *Комплекс C^ρ m-мерных плоскостей проективного пространства P^n, содержащий конечное число торсов, является комплексом $C^\rho(1,1)$ тогда и только тогда, когда для каждой его m-мерной образующей пересечение плоскости PT_lV^ρ с многообразием Сегре $S_l(m, n-m-1)$ содержит α-образующую и β-образующую многообразия $S_l(m, n-m-1)$.*

Доказательство. Действительно, пусть комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(1,1)$. Выбирая специальным образом репер, уравнения комплекса, а следовательно, и соответствующей плоскости PT_lV^ρ пространства $P^{(n-m)(m+1)-1}$

$= PT_l\Omega(m,n)$ можно привести к виду (10) или к параметрическим уравнениям вида (11). Пересечение плоскости PT_lV^ρ и многообразия Сегре $S_l(m,n-m-1)$ определяется условием

$$\omega_i^p\omega_j^q - \omega_i^q\omega_j^p = 0. \tag{21}$$

где формы ω_0^p $(p = m, m+1, \ldots, n-1)$ и ω_i^n $(i = 0, \ldots, m)$ являются базисными на комплексе $C^\rho(1,1)$ и при этом формы ω_k^r $(k = 1, \ldots, m,\ r = m+1, \ldots, n-1)$ удовлетворяют уравнениям (20) и выражаются через τ базисных форм Θ^τ $(\tau = 1, 2, \ldots, m(n-m-1)+1)$. Поскольку формы ω_0^p, ω_i^n и Θ^τ являются однородными координатами произвольной точки плоскости PT_lV^ρ, получим, что m-мерная плоскость, лежащая в плоскости PT_lV^ρ и определяемая уравнениями

$$\omega_0^p = 0, \quad \Theta^\tau = 0, \tag{22}$$

принадлежит многообразию Сегре $S_l(m,n-m-1)$. Такая m-мерная плоскость совпадает с α-образующей многообразия $S_l(m,n-m-1)$, заданной уравнениями

$$\omega_k^p = 0. \tag{23}$$

Поскольку формы ω_0^p, ω_i^n и Θ^τ являются однородными координатами произвольной точки плоскости PT_lV^ρ, получим, что $(n-m-1)$-мерная плоскость, лежащая в плоскости PT_lV^ρ и определяемая уравнениями

$$\omega_i^n = 0, \quad \Theta^\tau = 0, \tag{24}$$

принадлежит многообразию Сегре $S_l(m,n-m-1)$. Такая $(n-m-1)$-мерная плоскость совпадает с β-образующей многообразия $S_l(m,n-m-1)$, заданной уравнениями

$$\omega_i^r = 0. \tag{25}$$

Докажем обратное утверждение. Пусть пересечение плоскости PT_lV^ρ и многообразия $S_l(m,n-m-1)$ содержит α-образующую многообразия $S_l(m,n-m-1)$, определяемую уравнеными (23). Предположим, что точка A_0 является неособой, т. е. формы ω_0^p линейно независимы и их можно принять за $m+1$ из $\rho = m(n-m-1)+1$ однородных координат произвольной точки плоскости PT_lV^ρ. Плоскость PT_lV^ρ в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1} = PT_l\Omega(m,n)$ определяется уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i}\omega_i^p = 0, \tag{26}$$

где $\alpha = 1, 2, \ldots, n-1,\ i = 0, 1, \ldots, m,\ p = m+1, m+2, \ldots, n.$ Поскольку рассматриваемая α-образующая многообразия $S_l(m,n-m-1)$ лежит в данной плоскости, уравнения (26) должны выполняться тождественно в силу (23). Подставляя (23) в (26), получим

$$\Lambda_p^{\alpha 0}\omega_0^p = 0. \tag{27}$$

Так как формы ω_0^p линейно независимы, из уравнений (27) следует:

$$\Lambda_p^{\alpha 0} = 0. \tag{28}$$

Пусть пересечение плоскости PT_lV^ρ и многообразия $S_l(m,n-m-1)$ содержит β-образующую многообразия $S_l(m,n-m-1)$, определяемую уравнеми (25). Предположим, что гиперплоскость $A_0\wedge A_1\wedge\dots\wedge A_{n-1}$ неособая, т. е. формы ω_i^n линейно независимы и их можно принять за $n-m$ из $\rho=m(n-m-1)+1$ однородных координат произвольной точки плоскости PT_lV^ρ. Плоскость PT_lV^ρ в пространстве $P^{(n-m)(m+1)-1}=PT_l\Omega(m,n)$ определяется уравнениями

$$\Lambda_p^{\alpha i}\omega_i^p=0, \tag{29}$$

где $\alpha=1,2,\dots,n-1,\ i=0,1,\dots,m,\ p=m+1,m+2,\dots,n.$ Поскольку рассматриваемая β-образующая многообразия $S_l(m,n-m-1)$ лежит в данной плоскости, уравнения (29) должны выполняться тождественно в силу (25). Подставляя (25) в (29), получим

$$\Lambda_n^{\alpha i}\omega_i^n=0. \tag{30}$$

Так как формы ω_0^p линейно независимы, из уравнений (30) следует, что

$$\Lambda_n^{\alpha i}=0. \tag{31}$$

Очевидно, что соотношения (28) и (31) совпадают с соотношениями (8) и (9). Следовательно, комплекс C^ρ является комплексом $C^\rho(1,1)$. Теорема полностью доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Projective differential deometry of submanifolds. Amsterdam: North-Holland, 1993.

2. *Акивис М. А., Гольдберг В. В.* Многообразия с вырожденным гауссовым отображением с кратными фокусами и скрученные конусы // Изв. вузов. Математика. 2003. № 11. С. 3–14.

3. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Differential geometry of varieties with degenerate Gauss map. New York: Springer-Verl., 2004.

4. *Akivis M. A., Goldberg V. V.* Conformal differential geometry and its generalizations. New York: John Wiley & Sons, 2011.

5. *Гельфанд И. М., Гиндикин С. Г., Граев М. И.* Избранные задачи интегральной геометрии. М.: Добросвет. 2007.

6. *Нерсесян В. А.* Допустимые комплексы трехмерных плоскостей проективного пространства P^6. I // Уч. зап. ЕГУ. Сер. Физика и Математика. 2002. Вып. 1. С. 34–38.

7. *Нерсесян В. А.* Допустимые комплексы трехмерных плоскостей проективного простоpанства P^6. II // Уч. зап. ЕГУ. Сер. Физика и Математика. 2001. Вып. 3. С. 35–39.

8. *Макоха А. Н.* Геометрическая конструкция линейного комплекса плоскостей B_3 // Изв. вузов. Математика. 2018. № 11. С. 15–26.

9. *Стеганцева П. Г., Гречнева М. А.* Грассманов образ неизотропной поверхности псевдоевклидова пространства // Изв. вузов. Математика. 2017. № 2. С. 65–75.

10. *Арнольд В. И.* Комплексный лагранжев грассманиан // Функцион. анализ и его прил. 2000. Т. 34, вып. 3. С. 63–65.

11. *Арнольд В. И.* Лагранжев грассманиан кватернионного гиперсимплектического пространства // Функцион. анализ и его прил. 2001. Т. 35, вып. 1. С. 74–77.

12. *Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., Trnka J.* Scattering amplitudes and the positive Grassmannian. arXiv:1212.5605v2. 2012.

13. *Arkani-Hamed N., Trnka J.* The amplituhedron // J. High Energy Phys. 2014. V. 2014, N 10.

14. *Бубякин И. В.* Геометрия пятимерных комплексов двумерных плоскостей. Новосибирск: Наука, 2001.

15. *Бубякин И. В.* О строении пятимерных комплексов двумерных плоскостей проективного пространства P^5 с единственным торсом // Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 2. С. 3–12.

16. *Бубякин И. В.* О строении комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов // Мат. заметки СВФУ. 2017. Т. 24, № 4. С. 3–16.

17. *Бубякин И. В.* О строении некоторых комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов. I // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 2. С. 1–14.

18. *Bubyakin I. V.* To geometry of complexes of m-dimensional planes in projective space P^n, containing a finite number of developable surfaces // Классическая и современная геометрия: мат. Междунар. конф., посв. 100-летию В. Т. Базылева (Москва, 22–25 апреля 2019 г.) (под ред. А. В. Царева). М.: МГПУ, 2019. С. 17–18.

19. *Бубякин И. В.* О строении некоторых комплексов m-мерных плоскостей проективного пространства, содержащих конечное число торсов. II // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, No 4. С. 14–24.

20. *Akivis M. A.* On the differential geometry of a Grassmann manifold // Tensor. 1982. V. 38. P. 273–282.

21. *Акивис М. А.* Ткани и почти грассмановы структуры // Сиб. мат. журн. 1982. Т. 23, № 6. С. 6–15.

22. *Room T. G.* The geometry of determinantal loci. Cambridge: Camb. Univ. Press, 1938.

23. *Landsberg J. M.* Algebraic geometry and projective differential geometry. Seoul: Seoul Nat. Univ., 1997 (Lect. Notes Ser., Seoul; V. 45).

Поступила в редакцию 23 июня 2021 г.
После доработки 2 сентября 2021 г.
Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Бубякин Игорь Витальевич
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
Институт математики и информатики,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
`bubyakiniv@mail.ru`

Гоголева Ирина Васильевна
Арктический государственный агротехнологический университет,
инженерный факультет,
Сергеляхское шоссе 3 км, 3, Якутск 677007
`ivgogoleva61@yandex.ru`

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

UDC 514.755.5

ON DIFFERENTIAL GEOMETRY OF ρ–DIMENSIONAL COMPLEXES $C^\rho(1,1)$ OF m–DIMENSIONAL PLANES OF THE PROJECTIVE SPACE P^n

I. V. Bubyakin and I. V. Gogoleva

Abstract: The article focuses on differential geometry of ρ-dimensional complexes C^ρ of m-dimensional planes in the projective space P^n that contain a finite number of developable surfaces for which $n-m$ different developable surfaces have one common $(m+1)$-dimensional tangent plane to the developable surface. At the same time, the same $n-m$ different developable surfaces have one common characteristic $(m-1)$-dimensional plane common for two infinitely close generatrices of the developable surface. This article relates to researches on projective differential geometry based on the Cartan moving frame method and the method of exterior differential forms. These methods make it possible to study the differential geometry of submanifolds of different dimensions of a Grassmann manifold from a single viewpoint, as well as to extend the results to wider classes of manifolds of multidimensional planes. To study such submanifolds, we apply the Grassmann map of the manifold $G(m,n)$ onto the $(m+1)(n-m)$-dimensional algebraic manifold $\Omega(m,n)$ of the space P^N, where $N = \binom{n+1}{m+1} - 1$.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.25.88.001

Keywords: Grassmann manifold, complexes of multidimensional planes, Segre manifold.

REFERENCES

1. *Akivis M. A. and Goldberg V. V.*, Projective Differential Geometry of Submanifolds, North-Holland, Amsterdam (1993).
2. *Akivis M. A. and Goldberg V. V.*, "Varieties with a degenerate Gauss map with multiple foci, and twisted cones," Russ. Math., **47**, No. 11, 1–11 (2003).
3. *Akivis M. A. and Goldberg V. V.*, Differential Geometry of Manifolds with Degenerate Gauss Map, Springer-Verl., New York (2004).
4. *Akivis M. A. and Goldberg V. V.*, Conformal Differential Geometry and Its Generalizations, John Wiley & Sons, New York (2011).
5. *Gelfand I. M., Gindikin S. G., and Graev M. I.*, Selected Problems of Integral Geometry [in Russian], Dobrosvet, Moscow (2007).
6. *Nersesyan V. A.*, "Permissible complexes of three-dimensional planes of projective space P^6, I [in Russian]," Uch. Zap. Erevan. Gos. Univ., Fiz. Mat., **1**, 34–38 (2002).
7. *Nersesyan V. A.*, "Permissible complexes of three-dimensional planes of projective space P^6, II [in Russian]," Uch. Zap. Erevan. Gos. Univ., Fiz. Mat., **3**, 35–39 (2002).
8. *Makokha A. N.*, "The geometric construction of linear complex of the planes B_3," Russ. Math., No. 11, 15–26 (2018).
9. *Stegantseva P. G. and Grechneva M. A.*, "Grassmann image of non-isotropic surface of pseudo-Euclidean space," Russ. Math., No. 2, 65–75 (2017).

10. *Arnold V. I.*, “The complex Lagrangian Grassmannian,” Funct. Anal. Appl., **34**, No. 3, 63–65 (2000).
11. *Arnold V. I.*, “Lagrangian Grassmannian of quaternion hypersymplectic space,” Funct. Anal. Appl., **35**, No. 1, 74–77 (2001).
12. *Arkani-Hamed N., Bourjaily J. L., Cachazo F., Goncharov A. B., Postnikov A., and Trnka J.*, “Scattering amplitudes and the positive Grassmannian,” arXiv:1212.5605v2 (2012).
13. *Arkani-Hamed N. and Trnka J.*, “ The amplituhedron,” J. High Energy Phys., No. 10 (2014).
14. *Bubyakin I. V.*, Geometry of Five-Dimensional Complexes of Two-Dimensional Planes [in Russian], Nauka, Novosibirsk (2001).
15. *Bubyakin I. V.*, “About the structure of five-dimensional complexes of two-dimensional planes of the projective space P^5 with a single developable surface [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **24**, No. 2, 3–12 (2017).
16. *Bubyakin I. V.*, “About the structure of complexes of m-dimensional planes in projective space P^n containing a finite number of developable surfaces [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **24**, No. 4, 3–16 (2017).
17. *Bubyakin I. V.*, “On the structure of some complexes of m-dimensional planes of in the projective space P^n containing a finite number of developable surfaces, I [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **26**, No. 2, 3–16 (2019).
18. *Bubyakin I. V.*, “To geometry of complexes of m-dimensional planes in the projective space P^n containing a finite number of developable surfaces [in Russian],” in: Int. Conf. Mat. "Classical and modern geometry" in honor of V. T. Bazylev’s 100th anniv. (Moscow, Apr. 22–25, 2019) (A. V. Tsarev, ed.), pp. 17–18, Mosk. Gos. Pedagog. Univ., Moscow (2019).
19. *Bubyakin I. V.*, “On the structure of some complexes of m-dimensional planes of in the projective space P^n containing a finite number of developable surfaces, II [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **26**, No. 4, 14–24 (2019).
20. *Akivis M. A.*, “On the differential geometry of a Grassmann manifold,” Tensor, **38**, 273–282 (1982).
21. *Akivis M. A*,. “ Tissues and almost Grassmann structures,” Sib. Math. J., **23**, No. 6, 6–15 (1982).
22. *Room T. G.*, The Geometry of Determinantal Loci, Camb. Univ. Press, Cambridge (1938).
23. *Landsberg J. M.*, Algebraic Geometry and Projective Differential Geometry, Lect. Notes Ser., Seoul, **45**, Seoul Nat. Univ., Seoul (1999).

Submitted June 23, 2021
Revised September 2, 2021
Accepted November 26, 2021

Igor V. Bubyakin
Ammosov North-Eastern Federal University,
Institute of Mathematics and Informatics,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677891, Russia
`bubyakiniv@mail.ru`

Irina V. Gogoleva
ArcticStateAgrotechnologicalUniversity,
Faculty of Engineering,
3, Sergelyakhskoye Shosse 3 km, Yakutsk 677007, Russia
`ivgogoleva61@yandex.ru`