Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

УДК 517.9

НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. Е. Федоров, К. В. Бойко, Т. Д. Фуонг

Аннотация. Исследованы вопросы однозначной разрешимости начальных задач для линейных неоднородных уравнений общего вида с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто в банаховых пространствах. Рассмотрена задача Коши для разрешенного относительно старшей дробной производной уравнения, содержащего ограниченные операторы при младших производных, решение представлено с помощью интегралов типа Данфорда — Тейлора. Полученный результат позволил исследовать начальную задачу для линейного неоднородного уравнения с вырожденным оператором при старшей дробной производной при условии, что относительно этого оператора 0-ограниченным является оператор при второй по величине порядка производной. Абстрактные результаты использованы при изучении одного класса начально-краевых задач для уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто по времени и с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.75.46.006

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Герасимова — Капуто, вырожденное эволюционное уравнение, задача Коши, начально-краевая задача.

1. Введение

За последние несколько десятилетий произошел резкий рост интереса исследователей к дробным дифференциальным уравнениям, в первую очередь из-за их возрастающего значения в моделировании различных явлений, возникающих в физике, химии, математической биологии, технике [1, 2]. Подробнее о дробных дифференциальных уравнениях и тесно связанных с ними интегро-дифференциальных уравнениях Вольтерра см. в монографиях [3–10].

Задачи для различных классов уравнений с несколькими дробными производными исследовались многими авторами, в частности изучались начально-краевые задачи для телеграфных [11], диффузионных уравнений [12, 13] такого

Работа поддержана Приказом 211 Правительства Российской федерации, договор 02.A03.21.0011, и Российским фондом фундаментальных исследований, грант 21–51–54003.

вида, уравнения с запаздыванием [14, 15], различные уравнения в локально выпуклых (или просто в банаховых) пространствах с приложениями к уравнениям в частных производных [16–20].

В этой статье мы исследуем вопросы однозначной разрешимости для линейных неоднородных уравнений общего вида с несколькими дробными производными Герасимова — Капуто в банаховых пространствах. Рассмотрена задача Коши для разрешенного относительно старшей дробной производной уравнения, содержащего ограниченные операторы при младших производных, решение представлено с помощью интегралов типа Данфорда — Тейлора. Полученный результат позволил исследовать начальную задачу для линейного неоднородного уравнения с вырожденным оператором при старшей дробной производной при условии, что относительно этого оператора 0-ограниченным является оператор при второй по величине порядка производной. Абстрактные результаты использованы при изучении одного класса начально-краевых задач для уравнений с несколькими производными Герасимова — Капуто по времени и с многочленами от самосопряженного эллиптического дифференциального по пространственным переменным оператора.

Ранее условие относительной ограниченности использовалось, как правило, для пары операторов при старшей производной и при самой функции [13–21]. Отметим также касающиеся вырожденных дробных эволюционных уравнений работы [24–27], близкие к данной работе по объектам и методам исследования. В данной работе вторым оператором в относительно ограниченной паре является оператор при второй по величине порядка дробной производной. Мы продемонстрировали успешность предложенного подхода.

2. Однородное уравнение

Пусть $\mathscr{Z}$ — банахово пространство, $\mathscr{L}(\mathscr{Z})$ — пространство линейных ограниченных на $\mathscr{Z}$ операторов. Рассмотрим линейное однородное уравнение дробного порядка

$$D_t^{\alpha} z(t) = \sum_{k=1}^{n} D_t^{\alpha_k} A_k z(t) \tag{1}$$

с заданными начальными условиями

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad l = 0, 1, \dots, m-1. \tag{2}$$

Здесь $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $m = \lceil \alpha \rceil$ — наименьшее целое число, не превосходимое числом α, $m_k = \lceil \alpha_k \rceil$, $k = 1, 2, \dots, n$. *Решением задачи* (1), (2) будем называть функцию $z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathscr{Z})$, для которой $D_t^{\alpha} z, D_t^{\alpha_k} A_k z \in C(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathscr{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, и выполняются равенства (1) при всех $t \in \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ и (2).

Преобразование Лапласа функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{Z}$ будем обозначать через $\widehat{h}$ или $\mathrm{Lap}[h]$, если выражение для h слишком громоздкое.

Сначала при фиксированном $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ рассмотрим задачу

$$z^{(l)}(0) = z_l, \quad z^{(k)}(0) = 0, \; k = \{0, 1, \dots, m-1\} \setminus \{l\}, \tag{3}$$

для уравнения (1). В предположении, что к решению z такой задачи применимо преобразование Лапласа, рассмотрим два случая:

(1) $l \leq m_k - 1$, тогда $\widehat{D_t^{\alpha_k} z}(\lambda) = \lambda^{\alpha_k}\widehat{z}(\lambda) - \lambda^{\alpha_k - l - 1} z_l$;

(2) $l > m_k - 1$, тогда $\widehat{D_t^{\alpha_k} z}(\lambda) = \lambda^{\alpha_k}\widehat{z}(\lambda)$.

Обозначим $n_l = \min\{k \in \{1, 2, \dots, n\} : l \leq m_k - 1\}$ и из равенств (1), (3) получим следующее:

$$\lambda^{\alpha}\widehat{z}(\lambda) - \lambda^{\alpha - l - 1} z_l = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \widehat{z}(\lambda) - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k z_l,$$

$$\widehat{z}(\lambda) = \left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k\right) z_l.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем равенство

$$z(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k\right) z_l e^{\lambda t}\, d\lambda,$$

где можно взять $\gamma = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda = a\}$ при достаточно большом $a \in \mathbb{R}$. Таким образом, получили вид решения. Уточним некоторые детали.

Обозначим

$$A := \max\left\{\frac{1}{2n}, \|A_k\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} : k = 1, 2, \dots, n\right\}, \quad r_0 := (2An)^{\frac{1}{\alpha - \alpha_n}},$$

$$\gamma_1 := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = r_0, \arg\lambda \in (-\pi, \pi)\},$$

$$\gamma_2 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = \pi, \lambda \in [-r_0, -\infty)\},$$

$$\gamma_3 := \{\lambda \in \mathbb{C} : \arg\lambda = -\pi, \lambda \in (-\infty, -r_0]\}, \quad \gamma := \bigcup_{k=1}^{3} \gamma_k,$$

$$Z_l(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k\right) e^{\lambda t}\, d\lambda, \ t > 0,$$

при $l = 0, 1, \dots, m - 1$.

Лемма 1. *Пусть $A_k \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $z_l \in \mathscr{Z}$ при некотором $l \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Тогда функция $z(t) = Z_l(t) z_l$ является единственным решением задачи* (1), (3).

Доказательство. Для всех $\lambda \in \gamma$ имеем $|\lambda| \geq r_0 \geq (2n\,\|A_k\|)^{\frac{1}{\alpha - \alpha_k}}$, $k = 1, 2, \dots, n$, поэтому $|\lambda|^{\alpha_k - \alpha}\|A_k\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq 1/(2n)$,

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq \frac{1}{2},$$

$$\left\|\left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k\right)^{-1}\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq \frac{1}{|\lambda|^{\alpha}} \sum_{j=0}^{\infty} \left\|\sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k - \alpha} A_k\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}^{j} \leq \frac{2}{|\lambda|^{\alpha}},$$

поэтому существует обратный оператор $\left(\lambda^\alpha I-\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{Z})$.

Пусть $R>r_0$,

$$\Gamma_R=\bigcup_{i=1}^{4}\Gamma_{i,R},\quad \Gamma_{1,R}=\gamma_1,\quad \Gamma_{2,R}=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|=R,\arg\lambda\in(\pi,-\pi)\},$$

$$\Gamma_{3,R}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\arg\lambda=\pi,\lambda\in[-r_0,-R]\},$$

$$\Gamma_{4,R}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\arg\lambda=-\pi,\lambda\in[-R,-r_0]\},$$

замкнутый контур Γ_R обходится по часовой стрелке. Введем в рассмотрение также контуры

$$\Gamma_{5,R}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\arg\lambda=\pi,\lambda\in(-R,-\infty)\},$$

$$\Gamma_{6,R}=\{\lambda\in\mathbb{C}:\arg\lambda=-\pi,\lambda\in(-\infty,-R)\},$$

тогда $\gamma=\Gamma_{5,R}\cup\Gamma_{6,R}\cup\Gamma_R\setminus\Gamma_{2,R}$.

При $t>0$ определяющий оператор $Z_l(t)$ интеграл сходится, перепишем его в следующем виде:

$$Z_l(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\lambda^{-l-1}e^{\lambda t}\,d\lambda I+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\lambda^\alpha I-\sum_{k=1}^{n}\lambda^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}\sum_{k=1}^{n_l-1}\lambda^{\alpha_k-l-1}A_ke^{\lambda t}\,d\lambda$$
$$=\frac{t^l}{l!}I+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\left(\lambda^\alpha I-\sum_{k=1}^{n}\lambda^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}\sum_{k=1}^{n_l-1}\lambda^{\alpha_k-l-1}A_ke^{\lambda t}\,d\lambda.$$

При $t\in[0,1]$, $\lambda\in\gamma$ имеем следующие неравенства:

$$\left\|\left(\lambda^\alpha I-\sum_{k=1}^{n}\lambda^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}\sum_{k=1}^{n_l-1}\lambda^{\alpha_k-l-1}A_ke^{\lambda t}\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}$$
$$\le 2\sum_{k=1}^{n_l-1}|\lambda|^{\alpha_k-\alpha-l-1}\|A_k\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}e^{r_0}\le\frac{2Ane^{r_0}}{|\lambda|^{1+\alpha}}.$$

Здесь использован тот факт, что при $k\in\{1,2,\ldots,n_l-1\}$ выполняется $m_k-1<l$, поэтому $\alpha_k\le l$. Отсюда при $j\in\{0,1,\ldots,m-1\}$

$$\left\|\left(\lambda^\alpha I-\sum_{k=1}^{n}\lambda^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}\sum_{k=1}^{n_l-1}\lambda^{\alpha_k-l-1+j}A_ke^{\lambda t}\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}\le\frac{2Ane^{r_0}}{|\lambda|^{2+\alpha-m}},$$

при этом $2+\alpha-m=1+\alpha-(m-1)>1$. Следовательно,

$$\left\|\int_\gamma\left(\lambda^\alpha I-\sum_{k=1}^{n}\lambda^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}\sum_{k=1}^{n_l-1}\lambda^{\alpha_k-l-1+j}A_ke^{\lambda t}\,d\lambda\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})}$$
$$\le 2Ane^{r_0}\left(\int_{\Gamma_R}-\int_{\Gamma_{2,R}}+\int_{\Gamma_{5,R}}+\int_{\Gamma_{6,R}}\right)\frac{ds}{|\lambda|^{2+\alpha-m}}\to 0$$

при $R \to \infty$. В силу полученных оценок интегралы сходятся равномерно по $t \in [0,1]$, поэтому при $j = 0, 1, \dots, l$

$$Z_l^{(j)}(t) := \frac{t^{l-j}}{(l-j)!} I + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n_p - 1} \lambda^{\alpha_k - l - 1 + j} A_k e^{\lambda t}\, d\lambda, \ t > 0,$$

при $j = l+1, l+2, \dots, m-1$

$$Z_l^{(j)}(t) := \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} \sum_{k=1}^{n_l - 1} \lambda^{\alpha_k - l - 1 + j} A_k e^{\lambda t}\, d\lambda, \quad t > 0,$$

$Z_l^{(j)}(0) = 0$ при $j \neq l$, $Z_l^{(l)}(0) = I$. Таким образом, функция $Z_l(t) z_l$ удовлетворяет условиям (3).

Далее при $l = 0, 1, \dots, m-1$ оценим интегралы, определяющие $Z_l(t)$, по контуру γ_2:

$$\left| \frac{2A}{2\pi i} \int\limits_{r_0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n_l - 1} r^{\alpha_k - \alpha - l - 1} e^{-rt} dr \right| \leq \frac{An}{\pi} e^{-r_0 t} \int\limits_{r_0}^{+\infty} \frac{dr}{r^{\alpha + l + 1 - \alpha_n}} \leq C_1 e^{-r_0 t},$$

так как $\alpha + l + 1 - \alpha_n > 1$, $r_0 \geq 1$ по определению. На контуре γ_3 получаем аналогичные неравенства. Для контура γ_1 имеем

$$\left| \frac{2A}{2\pi i} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{n_l - 1} r_0^{\alpha_k - \alpha - l - 1} e^{r_0 e^{i\varphi} t}\, d\varphi \right| \leq C_2 \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{r_0 t \cos\varphi} d\varphi \leq 2\pi C_2 e^{r_0 t}.$$

Отсюда следует экспоненциальная ограниченность оператор-функции $Z_l(t)$, а значит, к ней можно применять преобразование Лапласа: при $\operatorname{Re}\mu > r_0$

$$\widehat{Z}_l(\mu) = \int\limits_0^\infty e^{-\mu t} Z_l(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) \int\limits_0^\infty e^{(\lambda - \mu)t}\, dt d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{\mu - \lambda} \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) d\lambda$$

с учетом неравенства

$$\left\| \frac{1}{\mu - \lambda} \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} \left(\lambda^{\alpha - l - 1} I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k - l - 1} A_k \right) \right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X})} \leq \frac{C}{|\lambda|^2}.$$

Следовательно,

$$\widehat{Z}_l(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int\limits_{\Gamma_R} - \int\limits_{\Gamma_{2,R}} + \int\limits_{\Gamma_{5,R}} + \int\limits_{\Gamma_{6,R}} \right) \frac{1}{\mu - \lambda} \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1}$$

$$\times \left(\lambda^{\alpha-l-1}I - \sum_{k=n_l}^{n} \lambda^{\alpha_k-l-1}A_k\right) d\lambda$$

$$= \left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k}A_k\right)^{-1} \left(\mu^{\alpha-l-1}I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k\right)$$

$$= \left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k}A_k\right)^{-1} \left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k}A_k + \sum_{k=1}^{n_l-1} \mu^{\alpha_k}A_k\right) \mu^{-l-1}$$

$$= \mu^{-l-1}I + \left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k}A_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n_l-1} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k.$$

Выражение получено по интегральной формуле Коши для интеграла по Γ_R при $R > |\mu|$, когда точка μ лежит внутри этого контура. При этом интегралы по $\Gamma_{j,R}$ при $j = 2, 5, 6$ стремятся к нулю при $R \to \infty$.

Тогда

$$\widehat{D_t^\alpha Z_l}(\mu) = \mu^\alpha \widehat{Z}_l(\mu) - \mu^{\alpha-l-1}I$$

$$= \mu^\alpha \left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k}A_k\right)^{-1} \left(\mu^{\alpha-l-1}I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k\right) - \mu^{\alpha-l-1}I$$

$$= \left(\mu^\alpha - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k}A_k + \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k}A_k\right) \left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}$$

$$\times \left(\mu^{\alpha-l-1}I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k\right) - \mu^{\alpha-l-1}I$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k}A_k \left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k}A_k\right)^{-1} \left(\mu^{\alpha-l-1}I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k\right)$$

$$- \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k = \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k}A_k\widehat{Z}_l(\mu) - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1}A_k = \mathrm{Lap}\left[\sum_{k=1}^{n} D_t^{\alpha_k}A_kZ_l\right](\mu).$$

Поэтому

$$D_t^\alpha Z_l(t) = \sum_{k=1}^{n} D_t^{\alpha_k}A_kZ_l(t) \quad \text{при } t > 0.$$

В то же время при таком k_0, что $m_{k_0} - 1 < l$,

$$\widehat{D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l}(\mu) = \mu^{\alpha_{k_0}} \left(I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k-\alpha}A_k\right)^{-1} \left(\mu^{-l-1}I - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-\alpha-l-1}A_k\right)$$

$$= \mu^{\alpha_{k_0}-l-1}I + \left(I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k-\alpha}A_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n_l-1} \mu^{\alpha_k-\alpha-l-1+\alpha_{k_0}}A_k,$$

$$D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \mu^{\alpha_{k_0}-l-1} e^{\mu t}\, d\mu I$$
$$+ \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(I - \sum_{k=1}^{n}\mu^{\alpha_k-\alpha}A_k\right)^{-1} \sum_{k=1}^{n_l-1}\mu^{\alpha_k-\alpha-l-1+\alpha_{k_0}}A_k e^{\mu t}\, d\mu.$$

Поэтому при $\alpha_{k_0} < l$
$$\lim_{t\to 0+} D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l(t) = 0,$$
а в случае $\alpha_{k_0} = l$
$$\lim_{t\to 0+} D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l(t) = I.$$
Пусть теперь $m_{k_0} - 1 \geq l$, тогда
$$\widehat{D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l}(\mu) = \mu^{\alpha_{k_0}}\left(I - \sum_{k=1}^{n}\mu^{\alpha_k-\alpha}A_k\right)^{-1}\left(\mu^{-l-1}I - \sum_{k=n_l}^{n}\mu^{\alpha_k-\alpha-l-1}A_k\right)$$
$$- \mu^{\alpha_{k_0}-l-1}I = \left(I - \sum_{k=1}^{n}\mu^{\alpha_k-\alpha}A_k\right)^{-1}\sum_{k=1}^{n_l-1}\mu^{\alpha_k-\alpha-l-1+\alpha_{k_0}}A_k,$$
$$D_t^{\alpha_{k_0}} Z_l(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(I - \sum_{k=1}^{n}\mu^{\alpha_k-\alpha}A_k\right)^{-1}\sum_{k=1}^{n_l-1}\mu^{\alpha_k-\alpha-l-1+\alpha_{k_0}}A_k e^{\mu t}\, d\mu.$$
Имеем $\alpha_k - \alpha - l - 1 + \alpha_{k_0} < -1$, так как $\alpha_{k_0} - \alpha < 0$ и $\alpha_k - l \leq 0$ при $k = 1, 2, \ldots, n_l - 1$, поэтому $\lim\limits_{t\to 0+} D_t^{\alpha} Z_l(t) = 0$. Таким образом, в силу ограниченности операторов A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, $Z_l(\cdot)z_l$ удовлетворяет уравнению (1) и при $t = 0$. Тем самым $Z_l(\cdot)z_l$ — решение задачи (1), (3).

Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ — два решения задачи (1), (3) на $\overline{\mathbb{R}}_+$. Зафиксируем $T > 0$, тогда $y(t) = z_1(t) - z_2(t)$ — решение задачи Коши $z^{(l)}(0) = 0$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$, для уравнения (1) на отрезке $[0, T]$. Доопределим функцию y нулем при $t \in (T, +\infty)$. Полученная функция ограничена и также является решением этой задачи Коши для уравнения (1), кроме, может быть, $t = T$. Подействуем преобразованием Лапласа на обе части равенства
$$D_t^{\alpha} y(t) = \sum_{k=1}^{n} D_t^{\alpha_k} A_k y(t)$$
и получим
$$\widehat{D_t^{\alpha} y}(\mu) = \mu^{\alpha}\widehat{y}(\mu) = \mathrm{Lap}\left[\sum_{k=1}^{n} D_t^{\alpha_k} A_k y\right](\mu) = \sum_{k=1}^{n}\ mu^{\alpha_k}A_k\widehat{y}(\mu).$$
Поэтому
$$\left(\mu^{\alpha}I - \sum_{k=1}^{n}\mu^{\alpha_k}A_k\right)\widehat{y}(\mu) \equiv 0$$

и при $\operatorname{Re}\mu > 0$ имеем $\widehat{y}(\mu) \equiv 0$. Отсюда $z_1(t) - z_2(t) = y(t) \equiv 0$ при $t \in [0, T)$. Так как $T > 0$ можно выбрать сколь угодно большим, $z_1(t) = z_2(t)$ при всех $t \geq 0$. $\square$

Из леммы 1 и линейности уравнения (1) сразу получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $A_k \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $z_l \in \mathscr{Z}$, $l = 0, 1, \dots, m-1$. *Тогда функция*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l$$

является единственным решением задачи (1), (2).

3. Неоднородное уравнение

Рассмотрим неоднородное уравнение

$$D_t^\alpha z(t) = \sum_{k=1}^{n} D_t^{\alpha_k} A_k z(t) + f(t), \quad t \in [0, T]. \tag{4}$$

Обозначим

$$Z(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda, \quad t > 0.$$

Лемма 2. *Пусть* $A_k \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $k = 1, 2, \dots, n$, $f \in C([0, T]; \mathscr{Z})$. *Тогда функция*

$$z_f(t) = \int_0^t Z(t-s) f(s)\, ds \tag{5}$$

является единственным решением задачи

$$z^{(l)}(0) = 0, \quad l = 0, 1, \dots, m-1, \tag{6}$$

для уравнения (4).

Доказательство. Имеем при $\alpha > 1$, $l = 0, 1, \dots, m-2$, $\lambda \in \gamma$

$$\left\| \lambda^l \left(\lambda^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \lambda^{\alpha_k} A_k \right)^{-1} \right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq \frac{2}{|\lambda|^{\alpha - l}},$$

при этом $\alpha - l > 1$, поэтому для всех $t \geq 0$

$$\|Z^{(l)}(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq C_1 \int_\gamma \frac{e^{t \operatorname{Re}\lambda}\, ds}{|\lambda|^{\alpha - l}} \leq C_2 e^{r_0 t},$$

$$Z^{(l)}(0) = 0, \quad z_f^{(p)}(t) = \int_0^t Z^{(p)}(t-s) f(s)\, ds, \quad p = 0, 1, \dots, m-1.$$

При $l = m-1$ имеем

$$\|Z^{(m-1)}(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le C \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{t\operatorname{Re}\lambda}\,ds}{|\lambda|^{\alpha-m+1}}, \quad \int\limits_{\gamma_1} \frac{e^{t\operatorname{Re}\lambda}\,ds}{|\lambda|^{\alpha-m+1}} \le 2\pi r_0^{m-1-\alpha} e^{r_0 t},$$

$$\int\limits_{\gamma_j} \frac{e^{t\operatorname{Re}\lambda}}{|\lambda|^{\alpha-m+1}}\,ds \le \int\limits_{r_0}^{\infty} \frac{e^{-rt}dr}{r^{\alpha-m+1}} \le t^{\alpha-m}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-\rho}d\rho}{\rho^{\alpha-m+1}} \le \Gamma(m-\alpha)t^{\alpha-m}, \quad j=1,2,$$

поэтому для всех $t>0$

$$\|Z^{(m-1)}(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le Ct^{\alpha-m}e^{r_0 t},$$

в частности, $\|Z^{(m-1)}(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} = O(t^{\alpha-m})$ при $t\to 0+$. Таким образом,

$$\|z_f^{(m-1)}(t)\|_{\mathscr{Z}} \le \int\limits_0^t C_1(t-s)^{\alpha-m}\|f(s)\|_{\mathscr{Z}}\,ds \le \frac{C_1\|f\|_{C([0,T];\mathscr{Z})}}{\alpha-m+1}t^{\alpha-m+1} \to 0$$

при $t\to 0+$ и условия Коши (6) для функции z_f вида (5) выполняются.

Положим $f(t)=0$ при $t>T$, тогда $z = Z*f$, $\widehat{z} = \widehat{Z}\widehat{f}$. Как при доказательстве леммы 1, нетрудно показать, что

$$\widehat{Z}(\mu) = \left(\mu^{\alpha}I - \sum_{k=1}^{n}\mu^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}, \tag{7}$$

так как для $\lambda\in\gamma$

$$\left\|\frac{1}{\mu-\lambda}\left(\lambda^{\alpha}I - \sum_{k=1}^{n}\lambda^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}\right\| \le \frac{C}{|\lambda|^{\alpha+1}}.$$

Следовательно,

$$\widehat{D_t^{\alpha}z}(\mu) = \mu^{\alpha}\widehat{z}_f(\mu) = \mu^{\alpha}\left(\mu^{\alpha}I - \sum_{k=1}^{n}\mu^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}\widehat{f}(\mu)$$
$$= \widehat{f}(\mu) + \sum_{k=1}^{n}\mu^{\alpha_k}A_k\left(\mu^{\alpha}I - \sum_{k=1}^{n}\mu^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}\widehat{f}(\mu) = \widehat{f}(\mu) + \sum_{k=1}^{n}\widehat{D_t^{\alpha_k}A_k}z(\mu). \tag{8}$$

Подействовав обратным преобразованием Лапласа на обе части этого равенства, получим при $t\in(0,T]$ равенство (4), так как $f\in C([0,T];\mathscr{X})$.

Обозначим

$$Z_{\alpha_k}(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\lambda^{\alpha_k}\left(\lambda^{\alpha}I - \sum_{k=1}^{n}\lambda^{\alpha_k}A_k\right)^{-1}e^{\lambda t}\,d\lambda, \quad t>0,$$

тогда при $k=1,2,\dots,n$

$$\|Z_{\alpha_k}(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{t\operatorname{Re}\lambda}\,ds}{|\lambda|^{\alpha-\alpha_n}} \le Ce^{r_0 t}t^{\alpha-\alpha_n-1}.$$

В силу (8)

$$D_t^{\alpha_k} z(t) = \int\limits_0^t Z_{\alpha_k}(t-s) f(s)\, ds,$$

поэтому

$$\|D_t^{\alpha_k} z(t)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{Z})} \leq \frac{C\|f\|_{C([0,T];\mathscr{Z})}}{\alpha - \alpha_n} t^{\alpha-\alpha_n} \to 0$$

при $t \to 0+$. В силу ограниченности операторов A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, равенство (4) выполняется и при $t = 0$ в предельном смысле.

Доказательство единственности такое же, как для леммы 1. $\square$

Теперь можно сформулировать общий результат.

Теорема 2. *Пусть* $A_k \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $f \in C([0,T];\mathscr{Z})$, $z_l \in \mathscr{Z}$, $l = 0, 1, \ldots, m-1$. *Тогда функция*

$$z(t) = \sum_{l=0}^{m-1} Z_l(t) z_l + \int\limits_0^t Z(t-s) f(s)\, ds$$

является единственным решением задачи (2), (4).

Замечание 1. Заметим, что при $l = 0, 1, \ldots, m-1$

$$Z_l(t) = D_t^{\alpha-l-1} Z(t) - \sum_{k=n_l}^{n} D_t^{\alpha_k-l-1} Z(t) A_k.$$

Действительно, из (7) следует, что при $\operatorname{Re}\mu > r_0$

$$\operatorname{Lap}\left[D_t^{\alpha-l-1} Z(t) - \sum_{k=n_l}^{n} D_t^{\alpha_k-l-1} Z(t) A_k\right](\mu)$$
$$= \left(\mu^\alpha I - \sum_{k=1}^{n} \mu^{\alpha_k} A_k\right)^{-1} \left(\mu^{\alpha-l-1} - \sum_{k=n_l}^{n} \mu^{\alpha_k-l-1} A_k\right) = \widehat{Z}_l(\mu).$$

4. Вырожденное уравнение

Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ — банаховы пространства, $\mathscr{L}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$, $\mathscr{C}l(\mathscr{X};\mathscr{Y})$ — множество всех линейных замкнутых операторов с областью определения, плотной в $\mathscr{X}$, действующих в $\mathscr{Y}$. Будем предполагать, что

$$n \in \mathbb{N}, \quad L, M_1, M_2, \ldots, M_{n-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X};\mathscr{Y}), \quad \ker L \neq \{0\}, \quad M_n \in \mathscr{C}l(\mathscr{X};\mathscr{Y}),$$

D_{M_n} — область определения оператора M_n, на которой задана норма графика

$$\|\cdot\|_{D_{M_n}} := \|\cdot\|_{\mathscr{X}} + \|M_n \cdot\|_{\mathscr{Y}}.$$

Обозначим

$$\rho^L(M_n) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M_n)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y};\mathscr{X})\},$$

$$R^L_\mu(M_n) := (\mu L - M_n)^{-1}L, \quad L^L_\mu(M_n) := L(\mu L - M_n)^{-1}.$$

Оператор M_n называется (L,σ)-*ограниченным*, если

$$\exists a > 0\, \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M_n))\,.$$

В случае (L,σ)-ограниченности оператора M_n определим проекторы

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M_n)\,d\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M_n)\,d\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}),$$

где $\gamma := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ (см. [28, с. 89, 90]). Положим

$$\mathscr{X}^0 := \ker P, \quad \mathscr{X}^1 := \operatorname{Im} P, \quad \mathscr{Y}^0 := \ker Q, \quad \mathscr{Y}^1 := \operatorname{Im} Q.$$

Обозначим для краткости $P_0 := I - P$, $Q_0 := I - Q$, через L_r ($M_{k,r}$) — сужение оператора L (M_k) на $\mathscr{X}^r$ ($D_{M_{n,r}} := D_{M_n} \cap \mathscr{X}^r$ при $k = n$), $r = 0,1$, $k = 1,2,\ldots,n$. При этом известно (см. [28, с. 90, 91]), что $LP = QL$, $M_nPx = QM_nx$ для $x \in D_{M_n}$, поэтому

$$M_{n,1} \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^1;\mathscr{Y}^1), \quad M_{n,0} \in \mathscr{C}l(\mathscr{X}^0;\mathscr{Y}^0), \quad L_r \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^r;\mathscr{Y}^r), \quad r = 0,1.$$

Кроме того, в этой ситуации существуют операторы $M^{-1}_{n,0} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^0;\mathscr{X}^0)$, $L^{-1}_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1;\mathscr{X}^1)$. Оператор M_n будем называть $(L,0)$-*ограниченным*, если L_0 — нулевой оператор.

Рассмотрим начальную задачу

$$x^{(l)}(0) = x_l,\ l = 0,1,\ldots,m_n-1, \quad (Px)^{(l)}(0) = x_l,\ l = m_n, m_n+1,\ldots,m-1, \quad (9)$$

для линейного неоднородного уравнения дробного порядка

$$D^\alpha_t Lx(t) = \sum_{k=1}^n D^{\alpha_k}_t M_kx(t) + g(t), \quad (10)$$

которое называется *вырожденным* в случае $\ker L \neq \{0\}$. Предполагается, что, как и прежде, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n < \alpha$, $m = \lceil\alpha\rceil$, $m_k = \lceil\alpha_k\rceil$, $k = 1,2,\ldots,n$, $g \in ([0,T];\mathscr{Y})$.

Решением задачи (9), (10) будем называть функцию $x : [0,T] \to D_{M_n}$, для которой $x \in C^{m_n-1}([0,T];\mathscr{X})$, $D^\alpha_t Lx, D^{\alpha_k}_t M_kx \in C([0,T];\mathscr{Y})$, $k = 1,2\ldots,n$, выполняются равенства (10) при всех $t \in [0,T]$ и (9).

В определении решения используется тот факт, что при условии $(L,0)$-ограниченности оператора M_n гладкость функции Px такая же, как у функции Lx, поскольку $Px = L^{-1}_1 Lx$, $Lx = LPx$. При этом условие $D^\alpha_t Lx \in C([0,T];\mathscr{X})$ в силу определения используемой здесь дробной производной Герасимова — Капуто означает, в частности, что $Lx \in C^{m-1}([0,T];\mathscr{X})$. Тем самым все начальные условия (9) на функции из класса решений имеют смысл.

Теорема 3. *Пусть* $L, M_k \in \mathscr{L}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$, $k = 1,2,\dots,n-1$, $M_n \in \mathscr{C}l(\mathscr{X};\mathscr{Y})$ $(L,0)$*-ограничен,* $M_kP = QM_k$, $k = 1,2,\dots,n-1$, $g \in C([0,T];\mathscr{Y})$, $x_l \in \mathscr{X}$ *при* $l = 0,1,\dots,m_n-1$, $x_l \in \mathscr{X}^1$ *при* $l = m_n, m_n+1,\dots,m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (9), (10).

Доказательство. Нетрудно показать, что из условий $M_kP = QM_k$ при $k = 1,2,\dots,n-1$ сразу следует, что

$$M_{k,r} \in \mathscr{L}\big(\mathscr{X}^r;\mathscr{Y}^r\big), \quad r = 0,1,\ k = 1,2,\dots,n-1.$$

Подействуем на (10) оператором $L_1^{-1}Q \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1;\mathscr{X}^1)$ и получим уравнение

$$D_t^{\alpha}v(t) = \sum_{k=1}^{n} D_t^{\alpha_k}L_1^{-1}M_kv(t) + L_1^{-1}Qg(t),$$

где $v(t) = Px(t)$. Если же аналогичным образом используем оператор $M_{n,0}^{-1}Q_0 \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^0;\mathscr{X}^0)$, то получится уравнение

$$D_t^{\alpha_n}w(t) = -\sum_{k=1}^{n-1} D_t^{\alpha_k}M_{n,0}^{-1}M_kw(t) - M_{n,0}^{-1}Q_0g(t), \tag{11}$$

$w(t) = P_0x(t)$. При этом использованы равенства

$$M_kP_0 = M_k - QM_k = Q_0M_k, \quad k = 1,2,\dots,n-1. \tag{12}$$

Уравнения (11) и (12) снабжены начальными условиями

$$v^{(l)}(0) = Px_l, \quad l = 0,1,\dots,m-1, \tag{13}$$

$$w^{(l)}(0) = P_0x_l, \quad l = 0,1,\dots,m_n-1. \tag{14}$$

По теореме 2 каждая из задач (11), (13) и (12), (14) имеет единственное решение, при этом оно имеет вид соответственно

$$v(t) = \sum_{l=0}^{m-1} X_{l,1}(t)Px_l + \int_0^t X_1(t-s)L_1^{-1}Qg(s)\,ds$$

и

$$w(t) = -\sum_{l=0}^{m_n-1} X_{l,0}(t)P_0x_l - \int_0^t X_0(t-s)M_{n,0}^{-1}Q_0g(s)\,ds,$$

где для $t > 0$

$$X_{l,1}(t) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma^1}\left(\lambda^{\alpha}I - \sum_{k=1}^{n}\lambda^{\alpha_k}L_1^{-1}M_{k,1}\right)^{-1} \times \left(\lambda^{\alpha-l-1}I - \sum_{k=n_l}^{n}\lambda^{\alpha_k-l-1}L_1^{-1}M_{k,1}\right)e^{\lambda t}\,d\lambda, \quad l = 0,1,\dots,m-1,$$

$$X_1(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^1}\left(\lambda^{\alpha} I - \sum_{k=1}^{n}\lambda^{\alpha_k} L_1^{-1} M_{k,1}\right)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda,$$

$$X_{l,0}(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^0}\left(\lambda^{\alpha_n} I - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{\alpha_k} M_{n,0}^{-1} M_{k,0}\right)^{-1}$$
$$\times\left(\lambda^{\alpha_n - l-1} I - \sum_{k=(n-1)_l}^{n-1}\lambda^{\alpha_k - l - 1} M_{n,0}^{-1} M_{k,0}\right) e^{\lambda t}\, d\lambda, \quad l = 0, 1, \ldots, m_n - 1,$$

$$X_0(t) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^0}\left(\lambda^{\alpha_n} I - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda^{\alpha_k} M_{n,0}^{-1} M_{k,0}\right)^{-1} e^{\lambda t}\, d\lambda,$$

контуры γ^1, γ^0 строятся так же, как контур γ для невырожденного случая, но с использованием в качестве радиуса окружности константы

$$r_{0,1} := \left(2n \max\left\{\frac{1}{2n}, \left\|L_1^{-1} M_{k,1}\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X}^1)} : k = 1, 2, \ldots, n\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha - \alpha_n}},$$

$$r_{0,0} := \left(2(n-1)\max\left\{\frac{1}{2(n-1)}, \left\|M_{n,0}^{-1} M_{k,0}\right\|_{\mathscr{L}(\mathscr{X}^0)} : k = 1, 2, \ldots, n-1\right\}\right)^{\frac{1}{\alpha_n - \alpha_{n-1}}}$$

соответственно. $\square$

Замечание 2. Из доказательства теоремы 3 следует, что задача Коши

$$x^{(l)}(0) = x_l, \quad l = 0, 1, \ldots, m-1,$$

для уравнения (10) разрешима лишь при выполнении дополнительных условий

$$P_0 x_{m_n + l} = w^{(m_n + l)}(0), \quad l = 0, 1, \ldots, m - m_n - 1,$$

связывающих между собой начальные данные задачи.

Замечание 3. Нетрудно заметить, что если оператор M_n $(L, 0)$-ограничен, условия $(Px)^{(l)}(0) = x_l \in \mathscr{X}^1$ при $l = m_n, m_n + 1, \ldots, m-1$ эквивалентны условиям $(Lx)^{(l)}(0) = y_l = Lx_l \in \mathscr{Y}^1$.

5. Приложение к начально-краевым задачам

Пусть заданы многочлены

$$P_p(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} c_j \lambda^j, \quad Q_p^k(\lambda) = \sum_{j=0}^{p} d_j^k \lambda^j,$$

$c_j, d_j^k \in \mathbb{C}$, $j = 0, 1, \ldots, p$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $c_p \neq 0$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$,

$$(\Lambda u)(s) = \sum_{|q| \le 2r} a_q(s) \frac{\partial^{|q|} u(s)}{\partial s_1^{q_1} \partial s_2^{q_2} \ldots \partial s_d^{q_d}}, \quad a_q \in C^{\infty}(\overline{\Omega}),$$

$$(B_l u)(s) = \sum_{|q|\le r_l} b_{lq}(s)\frac{\partial^{|q|}u(s)}{\partial s_1^{q_1}\partial s_2^{q_2}\dots\partial s_d^{q_d}}, \quad b_{lq}\in C^\infty(\partial\Omega),\ l=1,2,\dots,r,$$

$q=(q_1,q_2,\dots,q_d)\in\mathbb{N}_0^d$, $|q|=q_1+\dots+q_d$, операторный пучок $\Lambda, B_1, B_2,\dots,B_r$ регулярно эллиптичен [29]. Пусть оператор $\Lambda_1\in\mathscr{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения

$$D_{\Lambda_1} = H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega) := \{v\in H^{2r}(\Omega) : B_l v(s)=0,\ l=1,2,\dots,r,\ s\in\partial\Omega\}$$

действует согласно равенству $\Lambda_1 u = \Lambda u$. Предположим, что Λ_1 — самосопряженный оператор, тогда спектр $\sigma(\Lambda_1)$ оператора Λ_1 действительный и дискретный [29]. Пусть, кроме того, спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, $\{\varphi_k : k\in\mathbb{N}\}$ — ортонормированная в $L_2(\Omega)$ система собственных функций оператора Λ_1, занумерованных по невозрастанию соответствующих собственных значений $\{\lambda_k : k\in\mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(s,0) = u_l(s), \quad l=0,1,\dots,m-1,\ s\in\Omega, \tag{15}$$

$$B_l\Lambda^k u(s,t)=0, \quad k=0,1,\dots,n-1, \quad l=1,2,\dots,r, \quad (s,t)\in\partial\Omega\times[0,T], \tag{16}$$

$$D_t^\alpha P_p(\Lambda)u(s,t) = \sum_{k=1}^n D_t^{\alpha_k}Q_p^k(\Lambda)u(s,t) + h(s,t), \quad (s,t)\in\Omega\times[0,T], \tag{17}$$

где $0\le\alpha_1<\alpha_2<\dots<\alpha_n<\alpha$, $h:\Omega\times[0,T]\to\mathbb{R}$. Возьмем

$$\mathscr{X} = \{v\in H^{2rp}(\Omega) : B_l\Lambda^k v(s)=0,\ k=0,1,\dots,p-1,\ l=1,2,\dots,r,\ s\in\partial\Omega\},$$

$$\mathscr{Y} = L_2(\Omega),\ L=P_p(\Lambda)\in\mathscr{L}(\mathscr{X};\mathscr{Y}),\ M_k = Q_p^k(\Lambda)\in\mathscr{L}(\mathscr{X};\mathscr{Y}),\ k=1,2,\dots,n.$$

Пусть $P_p(\lambda_k)\ne 0$ для всех $k\in\mathbb{N}$, тогда существует обратный оператор $L^{-1}\in\mathscr{L}(\mathscr{Y};\mathscr{X})$ и задача (15)–(17) представима в виде задачи (2), (4), где $\mathscr{Z}=\mathscr{X}$, $A_k = L^{-1}M_k\in\mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $k=1,2,\dots,n$, $z_l = u_l(\cdot)$, $l=0,1,\dots,m-1$, $f(t)=L^{-1}h(\cdot,t)$. По теореме 2 существует единственное решение задачи (15)–(17) при любых $u_l\in\mathscr{X}$, $l=0,1,\dots,m-1$, и $h\in C([0,T];L_2(\Omega))$ (в таком случае $L^{-1}h\in C([0,T];\mathscr{X})$).

Пример 1. Возьмем

$$P_2(\lambda)\equiv\lambda^2, \quad Q_2^1(\lambda)=a, \quad Q_2^2(\lambda)=b_0+b_1\lambda, \quad d=1,$$

$$\Omega=(0,\pi), \quad r=1, \quad \Lambda u = \frac{\partial^2 u}{\partial s^2}, \quad B_1=I, \quad \alpha_1=1/4, \quad \alpha_2=4/3, \quad \alpha=5/2.$$

Тогда $m=3$ и задача (15)–(17) имеет вид

$$D_t^{5/2}\frac{\partial^4 u}{\partial s^4}(s,t) = aD_t^{1/4}u(s,t) + D_t^{4/3}\left(b_0+b_1\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)u(s,t), \quad (s,t)\in(0,\pi)\times\overline{\mathbb{R}}_+,$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(0,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(\pi,t)=0, \quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,$$

$$u(s,0)=u_0(s),\quad \frac{\partial u}{\partial t}(s,0)=u_1(s),\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(s,0)=u_2(s),\quad s\in(0,\pi).$$

Теперь рассмотрим вырожденный случай. Предположим, что $P_p(\lambda_k)=0$ при некотором $k\in\mathbb{N}$, тогда при условии, что многочлены P_p и Q_p^n не имеют общих корней на множестве $\{\lambda_k\}$, оператор M_n $(L,0)$-ограничен (см. [30]), при этом проекторы имеют вид

$$P=\sum_{P_p(\lambda_k)\neq 0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,\quad Q=\sum_{P_p(\lambda_k)\neq 0}\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,$$

где $\langle\cdot,\varphi_k\rangle$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Начальные условия с учетом замечания 3 зададим в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial^l u}{\partial t^l}(s,0)=u_l(s),\quad l=0,1,\dots,m_n-1,\ s\in\Omega,\\ \frac{\partial^l P_p(\Lambda)u}{\partial t^l}(s,0)=y_l(s),\quad l=m_n,m_n+1,\dots,m-1,\ s\in\Omega,\end{gathered}\tag{18}$$

тогда задача (16)–(18) представима в виде (9), (10) с выбранными выше пространствами $\mathscr{X},\mathscr{Y}$ и операторами L,M. Из теоремы 3 следует однозначная разрешимость задачи (16)–(18) при любых начальных данных $u_l\in\mathscr{X}$, $l=0,1,\dots,m_n-1$, $y_l\in L_2(\Omega)$, $l=m_n,m_n+1,\dots,m-1$, таких, что $\langle y_l,\varphi_k\rangle=0$ при $P_p(\lambda_k)=0$, и $h\in C([0,T];L_2(\Omega))$.

Пример 2. Пусть

$$P_2(\lambda)\equiv\lambda(\lambda+9),\quad n=2,\quad Q_2^1(\lambda)=a,\quad Q_2^2(\lambda)=1+\lambda,\quad d=1,$$

$$\Omega=(0,\pi),\quad r=1,\quad \Lambda u=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2},\quad B_1=I,\quad \alpha_1=1/4,\quad \alpha_2=4/3,\quad \alpha=5/2.$$

Тогда $m=3$, $m_2=2$ и задача (16)–(18) имеет вид

$$\begin{aligned}D_t^{5/2}&\left(\frac{\partial^4}{\partial s^4}+9\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)u(s,t)\\ &=aD_t^{1/4}u(s,t)+D_t^{4/3}\left(b_0+b_1\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)u(s,t),\quad (s,t)\in(0,\pi)\times\overline{\mathbb{R}}_+,\end{aligned}$$

$$u(0,t)=u(\pi,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(0,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}(\pi,t)=0,\quad t\in\overline{\mathbb{R}}_+,$$

$$u(s,0)=u_0(s),\ \frac{\partial u}{\partial t}(s,0)=u_1(s),\ \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^4}{\partial s^4}+9\frac{\partial^2}{\partial s^2}\right)u(s,0)=y_2(s),\ s\in(0,\pi).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Изд-во Артишок, 2008.

2. *Tarasov V. E.* Fractional dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. New York: Springer, 2011.

3. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

4. *Pruss J.* Evolutionary integral equations and applications. Basel: Birkhäuser-Verl., 1993.

5. *Podlubny I.* Fractional differential equations. Boston: Acad. Press, 1999.

6. *Kiryakova V.* Generalized fractional calculus and applications. Harlow: Longman Scientific & Technical, 1994; copublished in New York: John Wiley & Sons, Inc.

7. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces: PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven Univ. Technol., Univ. Press Facilities, 2001.

8. *Псху А. В.* Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.

9. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam; Boston; Heidelberg: Elsevier Sci. Publ., 2006.

10. *Kostić M.* Abstract Volterra integro-differential equations. Boca Raton: CRC Press, 2015.

11. *Jiang H., Liu F., Turner I., Burrage K.* Analitical solutions for the multi-term time-space Caputo–Riesz fractional advection-diffussion equations on a finite domain // J. Math. Anal. Appl. 2012. V. 389, N 2. P. 1117–1127.

12. *Liu F., Meerschaert M. M., McGough R. J., Zhuang P., Liu Q.* Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffussion equation // Fract. Calc. Appl. Anal. 2013. V. 16, N 1. P. 9–25.

13. *Alvarez-Pardo E., Lizama C.* Mild solutions for multi-term time-fractional differential equations with nonlocal initial conditions // Electron. J. Differ. Equ. 2014. V. 2014, N 39. P. 1–10.

14. *Singh V., Pandey D. N.* Existence results for multi-term time-fractional impulsive differential equations with fractional order boundary conditions // Malaya J. Math. 2017. V. 5, N 4. P. 625–635.

15. *Singh V., Pandey D. N.* Mild solutions for multi-term time-fractional impulsive differential systems // Nonlinear Dyn. Syst. Theory. 2018. V. 18, N 3. P. 307–318.

16. *Глушак А. В.* Задача типа Коши для абстрактного дифференциального уравнения с дробными производными // Мат. заметки. 2005. Т. 77, № 1. С. 28–41.

17. *Lizama C., Prado H.* Fractional relaxation equations on Banach spaces // Appl. Math. Lett. 2010. V. 23. P. 137–142.

18. *Karczewska A., Lizama C.* Solutions to stochastic fractional oscillation equations // Appl. Math. Lett. 2010. V. 23. P. 1361–1366.

19. *Li C.-G., Kostić M., Li M.* Abstract multi-term fractional differential equations // Kragujevac J. Math. 2014. V. 38, N 1. P. 51–71.

20. *Fedorov V. E., Kostić M.* On a class of abstract degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex spaces // Euras. Math. J. 2018. V. 9, N 3. P. 33–57.

21. *Плеханова М. В.* Задачи стартового управления для эволюционных уравнений дробного порядка // Челяб. физ.-мат. журн. 2016. Т. 1, № 3. С. 15–36.

22. *Федоров В. Е., Плеханова М. В., Нажимов Р. Р.* Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 1. С. 171–184.

23. *Байбулатова Г. Д.* Задачи стартового управления для одного класса вырожденных уравнений с младшими дробными производными // Челяб. физ.-мат. журн. 2020. Т. 5, вып. 3. С. 271–284.

24. *Федоров В. Е., Авилович А. С.* Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана — Лиувилля в секториальном случае // Сиб. мат. журн. 2019. Т. 60, № 2. С. 461–477.

25. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Балеану Д., Таш К.* Критерий приближенной управляемости одного класса вырожденных распределенных систем с производной Римана — Лиувилля // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 2. С. 41–59.

26. *Федоров В. Е., Нагуманова А. В.* Линейные обратные задачи для вырожденного эволюционного уравнения с производной Герасимова — Капуто в секториальном случае // Мат. заметки СВФУ. 2020. Т. 27, № 2. С. 54–76.

27. *Федоров В. Е., Фуонг Т. Д., Киен Б. Т., Бойко К. В., Ижбердеева Е. М.* Один класс полулинейных уравнений распределенного порядка в банаховых пространствах // Челяб. физ.-мат. журн. 2020. Т. 5, № 3. С. 342–351.

28. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

29. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.

30. *Федоров В. Е.* Сильно голоморфные группы линейных уравнений соболевского типа в локально выпуклых пространствах // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 5. С. 702–712.

Поступила в редакцию 25 марта 2021 г.
После доработки 25 марта 2021 г.
Принята к публикации 26 августа 2021 г.

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский государственный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Южно-Уральский государственный университет,
лаборатория функциональных материалов,
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080
`kar@csu.ru`

Бойко Ксения Владимировна
Челябинский государственный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454021
`kvboyko@mail.ru`

Та Дуй Фоунг
Институт математики Вьетнамской академии наук и технологий,
отделение численного анализа и научного вычисления,
Ханой, Вьетнам
`tdphuong@math.ac.vn`

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

UDC 517.9

INITIAL VALUE PROBLEMS FOR SOME CLASSES OF LINEAR EVOLUTION EQUATIONS WITH SEVERAL FRACTIONAL DERIVATIVES

V. E. Fedorov, K. V. Boyko, and T. D. Phuong

Abstract: The problems of unique solvability of initial problems for linear inhomogeneous equations of a general form with several Gerasimov–Caputo fractional derivatives in Banach spaces are investigated. The Cauchy problem is considered for an equation solved with respect to the highest fractional derivative containing bounded operators at the lowest derivatives. The solution is presented with the use of Dunford–Taylor type integrals. The obtained result allowed us to study an initial problem for a linear inhomogeneous equation with a degenerate operator at the highest fractional derivative, provided that, with respect to this operator, the operator at the second largest derivative is 0-bounded. Abstract results are applied to the study of a class of initial-boundary value problems for equations with several Gerasimov–Caputo time derivatives and with polynomials with respect to a self-adjoint elliptic differential operator in space variables.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.75.46.006

Keywords: fractional order differential equation, Gerasimov–Caputo fractional derivative, degenerate evolution equation, Cauchy problem, initial-boundary value problem.

REFERENCES

1. *Uchaykin V. V.*, Method of Fractional Derivatives [in Russian], Artishok, Ul'yanovsk (2008).
2. *Tarasov V. E.*, Fractional Dynamics: Applications of Fractional Calculus to Dynamics of Particles, Fields and Media, Springer, New York (2011).
3. *Samko S. G., Kilbas A. A., and Marichev O. I.*, Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach Sci. Publ., Yveron (1993).
4. *Pruss J.*, Evolutionary Integral Equations and Applications, Birkhäuser-Verl., Basel (1993).
5. *Podlubny I.*, Fractional Differential Equations, Acad. Press, Boston (1999).
6. *Kiryakova V.*, Generalized Fractional Calculus and Applications, Longman Scientific & Technical, Harlow (1994); copublished in John Wiley & Sons Inc., New York.
7. *Bajlekova E. G.*, Fractional Evolution Equations in Banach Spaces, PhD Thes., Eindhoven Univ. Technol., Univ. Press Facilities, Eindhoven (2001).
8. *Pskhu A. V.*, Partial Differential Equations of Fractional Order [in Russian], Nauka, Moscow (2005).
9. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., and Trujillo J. J.*, Theory and Applications of Fractional Differential Equations, Elsevier Sci. Publ., Amsterdam; Boston; Heidelberg (2006).
10. *Kostić M.*, Abstract Volterra Integro-Differential Equations, CRC Press, Boca Raton (2015).
11. *Jiang H., Liu F., Turner I., Burrage K.*, "Analitical solutions for the multi-term time-space Caputo–Riesz fractional advection-diffussion equations on a finite domain," J. Math. Anal. Appl., **389**, No. 2, 1117–1127 (2012).
12. *Liu F., Meerschaert M. M., McGough R. J., Zhuang P., and Liu Q.*, "Numerical methods for solving the multi-term time-fractional wave-diffussion equation," Fract. Calc. Appl. Anal., **16**, No. 1, 9–25 (2013).

13. *Alvarez-Pardo E. and Lizama C.*, "Mild solutions for multi-term time-fractional differential equations with nonlocal initial conditions," Electron. J. Differ. Equ., **2014**, No. 39, 1–10 (2014).

14. *Singh V. and Pandey D. N.*, "Existence results for multi-term time-fractional impulsive differential equations with fractional order boundary conditions," Malaya J. Math., **5**, No. 4, 625–635 (2017).

15. *Singh V. and Pandey D. N.*, "Mild solutions for multi-term time-fractional impulsive differential systems," Nonlinear Dyn. Syst. Theory, **18**, No. 3, 307–318 (2018).

16. *Glushak A. V.*, "A Cauchy-type problem for an abstract differential equation with fractional derivatives," Math. Notes, **77**, No. 1, 26–38 (2005).

17. *Lizama C. and Prado H.*, "Fractional relaxation equations on Banach spaces," Appl. Math. Lett., **23**, 137–142 (2010).

18. *Karczewska A. and Lizama C.*, "Solutions to stochastic fractional oscillation equations," Appl. Math. Lett., **2**, 1361–1366 (2010).

19. *Li C.-G., Kostić M., and Li M.*, "Abstract multi-term fractional differential equations," Kragujevac J. Math., **38**, No. 1, 51–71 (2014).

20. *Fedorov V. E. and Kostić M.*, "On a class of abstract degenerate multi-term fractional differential equations in locally convex spaces," Euras. Math. J., **9**, No. 3, 33–57 (2018).

21. *Plehanova M. V.*, "Start control problems for fractional order evolution equations [in Russian]," Chelyab. Fiz.-Mat. Zhurn., **1**, No. 3, 15–36 (2016).

22. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Nazhimov R. R.*, "Degenerate linear evolution equations with the Riemann–Liouville fractional derivative," Sib. Math. J., **59**, No. 1, 136–146 (2018).

23. *Baybulatova G. D.*, "Start control problem for a class of degenerate equations with lower order fractional derivatives [in Russian]," Chelyab. Fiz.-Mat. Zhurn., **5**, No. 3 271–284 (2020).

24. *Fedorov V. E. and Avilovich A. S.*, "A Cauchy type problem for a degenerate equation with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case," Sib. Math. J., **60**, No. 2, 359–372 (2019).

25. *Fedorov V. E., Gordievskih D. M., Baleanu D., and Tash K.*, "Criterion of the approximate controllability of a class of degenerate distributed systems with the Riemann–Liouville derivative [in Russian]," Mat. Zametki SVFU, **26**, No. 2, 41–59 (2019).

26. *Fedorov V. E. and Nagumanova A. V.*, "Linear inverse problems for degenerate evolution equations with the Gerasimov–Caputo derivatives in sectorial case [in Russian]," Mat. Zametki SVFU, **27**, No. 2, 54–76 (2020).

27. *Fedorov V. E., Phuong T. D., Kien B. T., Boyko K. V., and Izhberdeeva E. M.*, "A class of distributed order semilinear equations in Banach spaces [in Russian]," Chelyab. Fiz.-Mat. Zhurn., **5**, No. 3, 342–351 (2020).

28. *Sviridyuk G. A. and Fedorov V. E.*, Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators, VSP, Utrecht; Boston (2003).

29. *Triebel H.*, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North-Holland Publ. Co., Amsterdam; New York; Oxford (1978).

30. *Fedorov V. E.*, "Strongly holomorphic groups of linear equations of sobolev type in locally convex spaces," Differ. Equations, **40**, No. 5, 753–765 (2004).

Submitted March 25, 2021
Revised March 25, 2021
Accepted August 26, 2021

Vladimir E. Fedorov,
Chelyabinsk State University,
Mathematical Analysis Department,
129 Brothers Kashirin Street, Chelyabinsk 454021, Russia;
South Ural State University,
Laboratory of Functional Materials,
76 Lenin Avenue, Chelyabinsk 454080, Russia
kar@csu.ru

Kseniya V. Boyko,
Chelyabinsk State University,
Mathematical Analysis Department,
129 Brothers Kashirin Street, Chelyabinsk 454021, Russia
kvboyko@mail.ru

Ta D. Phuong,
Institute of Mathematics of the Vietnamese Academy of Science and Technology,
Department of Numerical Analysis and Scientific Computing
Hanoi, Vietnam
tdphuong@math.ac.vn