Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

УДК 539.3+517.958

О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ С ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ И СВОБОДНЫМ КРАЕМ

А. М. Хлуднев

Аннотация. Исследуются краевые задачи о равновесии упругой пластины со свободным краем, содержащей тонкое жесткое включение. Включение может отслаиваться от пластины, образуя тем самым межфазную трещину. Рассматриваемые краевые условия приводят к некоэрцитивным краевым задачам. Исследуются случаи возможного закрепления пластины в одной или двух фиксированных точках. Найдены необходимые и достаточные условия существования решений рассматриваемых задач.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.64.10.007

Ключевые слова: упругая пластина, тонкое жесткое включение, отслоение, некоэрцитивная краевая задача.

1. Постановка задачи равновесия

Анализ различных задач равновесия упругих пластин Кирхгофа — Лява, как правило, сопровождается заданием краевых условий, обеспечивающих коэрцитивность. В рамках указанной модели исследовался широкий класс различных задач: зависимость решений от физических и геометрических параметров, дифференцирование функционалов энергии по форме области, задачи оптимального управления, контактные задачи и т. д. (см. [1–20]). Разрешимость соответствующих краевых задач в случае коэрцитивных краевых условий при этом не представляет проблем. Такая же ситуация с разрешимостью имеет место и для задач равновесия упругих пластин в рамках модели Тимошенко [21, 22]. В данной работе рассматриваются краевые задачи о равновесии пластины Кирхгофа — Лява, содержащей тонкое жесткое включение, с некоэрцитивными краевыми условиями. Устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости.

По поводу общих подходов к некоэрцитивным краевым задачам для эллиптических уравнений см., например, [23].

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ, а $\gamma \subset \Omega$ — гладкая кривая без самопересечений (рис. 1). Обозначим через $n = (n_1, n_2)$,

Работа поддержана грантом РФФИ (проект 18–29–10007).

$\nu = (\nu_1, \nu_2)$ единичные нормальные векторы к Γ и γ соответственно. Обозначим также $w_n = \frac{\partial w}{\partial n}$, $w_\nu = \frac{\partial w}{\partial \nu}$. Если $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, то $\nabla\nabla m = m_{ij,ij}$. По повторяющимся индексам производится суммирование. Все величины с двумя нижними индексами в дальнейшем считаются симметричными по этим индексам. Для скалярной функции w положим $\nabla\nabla w = \{w_{,ij}\}$, $i, j = 1, 2$.

Введем обозначение для изгибающего момента m_ν и поперечной силы $t^\nu = t^\nu(m)$ на γ,

$$m_\nu = -m_{ij}\nu_j\nu_i, \quad t^\nu = -m_{ij,j}\nu_i - m_{ij,k}\tau_k\tau_j\nu_i, \quad (\tau_1, \tau_2) = (-\nu_2, \nu_1). \tag{1.1}$$

Тогда для гладких функций $w, m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, справедлива следующая формула Грина

$$-\int\limits_\Omega m \cdot \nabla\nabla w = -\int\limits_\Omega w\nabla\nabla m + \int\limits_\Gamma m_n w_n - \int\limits_\Gamma t^n w. \tag{1.2}$$

Аналогичная формула может быть выписана и для области $\Omega_\gamma = \Omega\backslash\bar{\gamma}$ с разрезом γ,

$$-\int\limits_{\Omega_\gamma} m \cdot \nabla\nabla w = -\int\limits_{\Omega_\gamma} w\nabla\nabla m - \int\limits_\gamma [m_\nu w_\nu] + \int\limits_\gamma [t^\nu w] + \int\limits_\Gamma m_n w_n - \int\limits_\Gamma t^n w, \tag{1.3}$$

где $[p] = p^+ - p^-$ — скачок функции p на γ. Знаки $\pm$ соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормали ν. Величины m_n, t^n с нормалью n определяются на Γ аналогично (1.1).

Обозначим через $H^{2,\gamma}(\Omega)$ пространство Соболева,

$$H^{2,\gamma}(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) \mid v|_\gamma \in S(\gamma)\},$$

где

$$S(\gamma) = \{l \mid : l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0, 1, 2,\ x = (x_1, x_2) \in \gamma\}.$$

При определении пространства $S(\gamma)$ постоянные a_0, a_1, a_2 произвольны. Введем тензор модулей упругости $A = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, удовлетворяющий условиям симметрии и положительной определенности

$$a_{ijkl}\xi_{ij}\xi_{kl} \geq c_0|\xi|^2 \quad \forall\xi_{ij},\ c_0 = \text{const} > 0,$$

$$a_{ijkl} = a_{jikl} = a_{klij},\ a_{ijkl} \in L^\infty(\Omega),\ i, j, k, l = 1, 2.$$

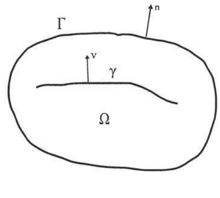

Рис. 1. Упругая пластина с включением γ.

Положим $m(w) = -A\nabla\nabla w$, или $m_{ij}(w) = -a_{ijkl}w_{,kl}$, $i,j = 1,2$, и введем билинейную форму $D : H^2(\Omega) \times H^2(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$(w,v) = -\int\limits_{\Omega} m_{ij}(w)v_{,ij} = \int\limits_{\Omega} a_{ijkl}w_{,kl}v_{,ij}.$$

Нам понадобится пространство инфинитезимальных жестких перемещений

$$S(\Omega) = \{l \mid l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2;\ x = (x_1,x_2) \in \Omega\}.$$

Как и ранее при определении пространства $S(\gamma)$, постоянные a_i здесь произвольны. Введем далее скалярное произведение в пространстве $H^{2,\gamma}(\Omega)$:

$$(w,v) = \int\limits_{\Omega} w \int\limits_{\Omega} v + \int\limits_{\Omega} \nabla w\nabla v + D(w,v). \tag{1.4}$$

Ясно, что скалярное произведение (1.4) индуцирует норму в $H^{2,\gamma}(\Omega)$, эквивалентную стандартной.

Пусть

$$S^{\gamma}(\Omega) = \left\{v \in H^{2,\gamma}(\Omega) \mid \int\limits_{\Omega} v = 0,\ \int\limits_{\Omega} v_{,i} = 0,\ i = 1,2\right\}.$$

Предложение 1. *Пространство $H^{2,\gamma}(\Omega)$ можно представить в виде прямой суммы подпространств по отношению к скалярному произведению* (1.4)*:*

$$H^{2,\gamma}(\Omega) = S(\Omega) \oplus S^{\gamma}(\Omega).$$

Доказательство. Возьмем произвольные элементы $l \in S(\Omega)$, $v \in H^{2,\gamma}(\Omega)$. Пусть $l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$. Имеем

$$(v,l) = a_i \int\limits_{\Omega} v_{,i} + \int\limits_{\Omega} v \int\limits_{\Omega} (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2). \tag{1.5}$$

Из (1.5) следует, что необходимое и достаточное условие для равенства $(v,l) = 0$ для всех $l \in S(\Omega)$ имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} v = 0,\ \int\limits_{\Omega} v_{,i} = 0, \quad i = 1,2,$$

т. е. $v \in S^{\gamma}(\Omega)$. Предложение 1 доказано.

Рассмотрим функционал энергии $\Pi : H^{2,\gamma}(\Omega) \to \mathbb{R}$,

$$\Pi(v) = \frac{1}{2}D(v,v) - \int\limits_{\Omega} fv - \int\limits_{\gamma} gv,$$

где $f \in L^2(\Omega)$ — заданная внешняя сила, действующая на пластину, а $g \in L^2(\gamma)$ — заданная внешняя сила, действующая на тонкое включение. В этом случае задача минимизации

$$\inf_{v \in S^{\gamma}(\Omega)} \Pi(v) \tag{1.6}$$

имеет единственное решение. Для доказательства разрешимости задачи (1.6) достаточно проверить коэрцитивность функционала Π на $S^{\gamma}(\Omega)$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *Существует постоянная* $c_1 > 0$ *такая, что*

$$D(v,v) \geq c_1 \|v\|^2_{H^{2,\gamma}(\Omega)} \quad \forall v \in S^\gamma(\Omega).$$

Доказательство. Предположим, что (1.7) неверно. Тогда существует последовательность $v^k \in S^\gamma(\Omega)$ такая, что при $k \to \infty$

$$\|v^k\|_{H^{2,\gamma}(\Omega)} = 1, \;\; D(v^k, v^k) \to 0. \tag{1.8}$$

Выбирая при необходимости подпоследовательность, можно считать, что

$$v^k \to v \text{слабо в } H^{2,\gamma}(\Omega), \;\; \text{сильно в } H^{1,\gamma}(\Omega). \tag{1.9}$$

Далее, имеем

$$0 = \liminf D(v^k, v^k) \geq D(v,v) \geq 0,$$

т. е. $D(v,v) = 0$ и, таким образом, $v(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2$, $x \in \Omega$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0,1,2$. Следовательно, $v \in S(\Omega) \cap S^\gamma(\Omega)$ и $v(x) = 0$ в Ω. Кроме того,

$$\|v^k\|^2_{H^{2,\gamma}(\Omega)} = \|v^k\|^2_{H^{1,\gamma}(\Omega)} + D(v^k, v^k) \to \|v\|^2_{H^{1,\gamma}(\Omega)} + D(v,v) = \|v\|^2_{H^{2,\gamma}(\Omega)}.$$

Следовательно, $\|v^k\|_{H^{2,\gamma}(\Omega)} \to \|v\|_{H^{2,\gamma}(\Omega)}$, и в силу (1.9) заключаем, что

$$v^k \to v \text{ сильно в } \; H^{2,\gamma}(\Omega).$$

Из (1.8) следует, что $\|v\|_{H^{2,\gamma}(\Omega)} = 1$; противоречие, так как $v = 0$ в Ω. Предложение 2, таким образом, доказано, поэтому функционал Π коэрцитивен на $S^\gamma(\Omega)$. Это означает, что задача (1.6) имеет решение, удовлетворяющее тождеству

$$w \in S^\gamma(\Omega), \tag{1.10}$$

$$D(w,v) - \int\limits_\Omega fv - \int\limits_\gamma gv = 0 \quad \forall v \in S^\gamma(\Omega). \tag{1.11}$$

Предположим, что внешние нагрузки f, g удовлетворяют условию

$$\int\limits_\Omega fl + \int\limits_\gamma gl = 0 \quad \forall l \in S(\Omega). \tag{1.12}$$

В этом случае тождество (1.10), (1.11) можно переписать в виде

$$w \in S^\gamma(\Omega), \quad D(w, v+l) - \int\limits_\Omega f(v+l) - \int\limits_\gamma g(v+l) = 0 \quad \forall v \in S^\gamma(\Omega), \; \forall l \in S(\Omega),$$

или, учитывая предложение 1, в таком виде:

$$w \in H^{2,\gamma}(\Omega), \tag{1.13}$$

$$D(w,v) - \int\limits_\Omega fv - \int\limits_\gamma gv = 0 \quad \forall v \in H^{2,\gamma}(\Omega). \tag{1.14}$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *При выполнении условия* (1.12) *существует решение задачи* (1.14), (1.15).

Заметим, что условие (1.12) не только достаточно, но и необходимо для разрешимости задачи (1.13), (1.14). Действительно, пусть задача (1.13), (1.14) имеет решение. В качестве тестовых функций в (1.14) выберем l, где $l \in S(\Omega)$. В этом случае из (1.14) следует (1.12), что и требовалось.

Приведем теперь дифференциальную формулировку задачи (1.13), (1.14). Требуется найти функции w, $m = \{m_{ij}\}, i, j = 1, 2$, определенные в Ω, а также функцию $l_0 \in S(\gamma)$ такие, что

$$-\nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{1.15}$$

$$m + A\nabla\nabla w = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{1.16}$$

$$m_n = t^n = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{1.17}$$

$$w = l_0 \quad \text{на } \gamma, \tag{1.18}$$

$$[w_\nu] = [m_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{1.19}$$

$$\int\limits_\gamma gv - \int\limits_\gamma [t^\nu]v = 0 \quad \forall v \in H^{2,\gamma}(\Omega). \tag{1.20}$$

Следует отметить, что (1.20) можно переписать в эквивалентном виде

$$\int\limits_\gamma g - \int\limits_\gamma [t^\nu] = 0, \quad \int\limits_\gamma gx_i - \int\limits_\gamma [t^\nu]x_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *На классе гладких решений формулировки* (1.13), (1.14) *и* (1.15)–(1.20) *эквивалентны.*

Доказательство. Пусть задача (1.15)–(1.20) имеет гладкое решение. Тогда из (1.15) следует, что

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} (-\nabla\nabla m - f)v = 0 \quad \forall v \in H^{2,\gamma}(\Omega).$$

Применяя формулу Грина (1.2), с учетом того что $[v] = [v_\nu] = 0$ на γ, отсюда имеем

$$-\int\limits_{\Omega_\gamma} m\nabla\nabla v - \int\limits_{\Omega_\gamma} fv \pm \int\limits_\gamma gv + \int\limits_\gamma [m_\nu]v_\nu - \int\limits_\gamma [t^\nu]v + \int\limits_\Gamma m_n v_n - \int\limits_\Gamma t^n v = 0. \tag{1.21}$$

Здесь можно поменять область интегрирования Ω_γ на Ω в интегралах для $m\nabla\nabla v$ и для fv. Учитывая соотношения (1.16)–(1.20), из (1.21) получим (1.14). Итак, из (1.15)–(1.20) вытекает (1.13), (1.14).

Обратно. Пусть задача (1.13), (1.14) имеет гладкое решение. Подставляя в (1.14) в качестве тестовых функций $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$, получим уравнение равновесия (1.15), где $m = -A\nabla\nabla w$. Интегрируя затем по частям в (1.14) с помощью формулы (1.2), будем иметь

$$0 = D(w,v) - \int\limits_\vee fv - \int\limits_\gamma gv = -\int\limits_\gamma [m_\nu]v_\nu + \int\limits_\gamma [t^\nu]v - \int\limits_\Gamma m_n v_n + \int\limits_\Gamma t^n v - \int\limits_\gamma gv.$$

Отсюда следуют соотношения (1.16), (1.18), (1.19). Теорема 2 доказана.

2. Пластина, закрепленная в заданной точке

В этом разделе будем считать, что $(0,0) \in \Omega$ и перемещение пластины w фиксированно в точке $(0,0)$, именно, полагаем $w(0,0) = 0$. Обозначим $\Omega_0 = \Omega \setminus \{(0,0)\}$ и рассмотрим пространства

$$S^0(\gamma) = \{l \mid: l(x) = a_1x_1 + a_2x_2, \quad a_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2;\ x = (x_1,x_2) \in \gamma\},$$

$$H^{2,\gamma}(\Omega_0) = \{v \in H^2(\Omega_0) \mid v(0,0) = 0,\ v|_\gamma \in S^0(\gamma)\}.$$

Заметим, что согласно [24, разд. 1.2.5] каждая функция из $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$ принадлежит пространству $H^{2,\gamma}(\Omega)$. Пусть

$$S^0(\Omega_0) = \{l \mid l(x) = a_1x_1 + a_2x_2,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2;\ x = (x_1,x_2) \in \Omega_0\}.$$

Рассмотрим скалярное произведение в пространстве $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$,

$$\langle w, v\rangle = \int\limits_{\Omega_0} w \int\limits_{\Omega_0} v + \int\limits_{\Omega_0} \nabla w \nabla v + D_0(w,v), \tag{2.1}$$

где

$$D_0(w,v) = \int\limits_{\Omega_0} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij}.$$

Скалярное произведение (2.1) индуцирует норму в пространстве $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$, эквивалентную стандартной.

Пусть

$$S^\gamma(\Omega_0) = \Big\{v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0) \mid \int\limits_{\Omega_0} v \int\limits_{\Omega_0} x_i + \int\limits_{\Omega_0} v_{,i} = 0,\ i = 1,2\Big\}.$$

Предложение 3. *Пространство $H^{2,\gamma}(\Omega_0)$ можно представить в виде прямой суммы подпространств по отношению к скалярному произведению (2.1):*

$$H^{2,\gamma}(\Omega_0) = S^0(\Omega_0) \oplus S^\gamma(\Omega_0).$$

Доказательство. Возьмем произвольные $l \in S^0(\Omega_0)$, $v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0)$. Пусть $l(x) = a_1x_1 + a_2x_2$. Тогда

$$\langle v, l\rangle = a_i(\int\limits_{\Omega_0} v \int\limits_{\Omega_0} x_i + \int\limits_{\Omega_0} v_{,i}).$$

Отсюда заключаем, что необходимое и достаточное условие для равенства $\langle v, l\rangle = 0$ при всех $l \in S^0(\Omega_0)$ имеет вид

$$\int\limits_{\Omega_0} v \int\limits_{\Omega_0} x_i + \int\limits_{\Omega_0} v_{,i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

т. е. $v \in S^\gamma(\Omega_0)$. Предложение 3 полностью доказано.

Рассмотрим теперь функционал энергии $\Pi_0 : H^{2,\gamma}(\Omega_0) \to \mathbb{R}$,

$$\Pi_0(v) = \frac{1}{2}D_0(v, v) - \int\limits_{\Omega_0} fv - \int\limits_{\gamma} gv,$$

и задачу минимизации

$$\inf_{v\in S^\gamma(\Omega_0)} \Pi_0(v). \tag{2.2}$$

Для доказательства разрешимости задачи (2.2) достаточно проверить коэрцитивность функционала Π_0 на $S^\gamma(\Omega_0)$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение 4. *Существует постоянная $c_2 > 0$ такая, что*

$$D_0(v, v) \geq c_2\|v\|^2_{H^{2,\gamma}(\Omega_0)} \quad \forall v \in S^\gamma(\Omega_0). \tag{2.3}$$

Доказательство этого утверждения проводится так же, как и предложения 2, и поэтому опускается.

В соответствии с неравенством (2.3) функционал Π_0 будет коэрцитивным на $S^\gamma(\Omega_0)$, поэтому решение задачи (2.2) существует. Это решение удовлетворяет тождеству

$$w \in S^\gamma(\Omega_0), \tag{2.4}$$

$$D_0(w, v) - \int\limits_{\Omega_0} fv - \int\limits_{\gamma} gv = 0 \quad \forall v \in S^\gamma(\Omega_0). \tag{2.5}$$

Предположим, что функции f, g удовлетворяют условию

$$\int\limits_{\Omega_0} fl + \int\limits_{\gamma} gl = 0 \quad \forall l \in S^0(\Omega_0). \tag{2.6}$$

В этом случае тождество (2.4), (2.5) можно записать в виде

$$w \in S^\gamma(\Omega_0), \quad D_0(w, v+l) - \int\limits_{\Omega_0} f(v+l) - \int\limits_{\gamma} g(v+l) = 0 \quad \forall v \in S^\gamma(\Omega_0 \ \forall l \in S^0(\Omega_0). \tag{2.7}$$

Таким образом, учитывая предложение 3, полученную задачу (2.7) перепишем в виде

$$w \in H^{2,\gamma}(\Omega_0), \tag{2.8}$$

$$D_0(w,v) - \int\limits_{\Omega_0} fv - \int\limits_{\gamma} gv = 0 \quad \forall v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0). \tag{2.9}$$

Сформулируем доказанное выше утверждение в виде теоремы.

Теорема 3. *При выполнении условия* (2.6) *существует решение задачи* (2.8), (2.9).

Заметим также, что условие (2.6) не только достаточно, но и необходимо для разрешимости задачи (2.8), (2.9).

Теперь мы в состоянии привести дифференциальную формулировку задачи (2.8), (2.9). Требуется найти функции w, $m = \{m_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, определенные в Ω_0, а также функцию $l_0 \in S^0(\gamma)$ такие, что

$$-\nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega_0 \setminus \bar{\gamma}, \tag{2.10}$$

$$m + A\nabla\nabla w = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{2.11}$$

$$m_n = t^n = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{2.12}$$

$$w(0,0) = 0; \ w = l_0 \quad \text{на } \gamma, \tag{2.13}$$

$$[w_\nu] = [m_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{2.14}$$

$$\int\limits_{\gamma} gv - \int\limits_{\gamma} [t^\nu] v = 0 \quad \forall v \in H^{2,\gamma}(\Omega_0). \tag{2.15}$$

Аналогично теореме 2 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *На классе гладких решений формулировки* (2.8), (2.9) *и* (2.10)–(2.15) *эквивалентны.*

Заметим, что (2.15) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\gamma} g x_i - \int\limits_{\gamma} [t^\nu] x_i = 0, \quad i = 1, 2.$$

3. Пластина, закрепленная в двух точках

Пусть $(1,0) \in \Omega_0$. Обозначим $\Omega_1 = \Omega_0 \setminus \{(1,0)\}$. Предполагаем, что пластина закреплена в точках $(0,0)$, $(1,0)$, именно, считаем, что $w(0,0) = w(1,0) = 0$. Введем в рассмотрение пространства

$$S^{00}(\gamma) = \{l \mid l(x) = a_2 x_2, \ a_2 \in \mathbb{R}, \ x = (x_1, x_2) \in \gamma\},$$

$$H^{2,\gamma}(\Omega_1) = \{v \in H^2(\Omega_1) \mid v(0,0) = v(1,0) = 0, \ v|_\gamma \in S^{00}(\gamma)\}.$$

Пусть

$$S^{00}(\Omega_1) = \{l \mid l(x) = a_2 x_2,\ a_2 \in \mathbb{R};\ x = (x_1, x_2) \in \Omega_1\}.$$

При определении пространств $S^{00}(\gamma)$ и $S^{00}(\Omega_1)$ постоянная a_2 произвольна. Как и в предыдущем разделе, следует заметить, что любая функция из $H^{2,\gamma}(\Omega_1)$ принадлежит пространству $H^{2,\gamma}(\Omega)$.

В пространстве $H^{2,\gamma}(\Omega_1)$ можно ввести скалярное произведение

$$\{w, v\} = \int\limits_{\Omega_1} w \int\limits_{\Omega_1} v + \int\limits_{\Omega_1} \nabla w \nabla v + D_1(w, v), \tag{3.1}$$

где

$$D_1(w, v) = \int\limits_{\Omega_1} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij}.$$

Обозначим

$$S^{\gamma}(\Omega_1) = \Big\{ v \in H^{2,\gamma}(\Omega_1) \mid \int\limits_{\Omega_1} v \int\limits_{\Omega_1} x_2 + \int\limits_{\Omega_1} v_{,2} = 0 \Big\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 5. *Пространство $H^{2,\gamma}(\Omega_1)$ можно представить в виде прямой суммы подпространств по отношению к скалярному произведению* (3.1)*:*

$$H^{2,\gamma}(\Omega_1) = S^{00}(\Omega_1) \oplus S^{\gamma}(\Omega_1).$$

Доказательство предложения 5 напоминает рассуждения, использованные при доказательстве предложения 3, и потому опускается.

Рассмотрим функционал энергии пластины $\Pi_1 :\ H^{2,\gamma}(\Omega_1) \to \mathbb{R}$,

$$\Pi_1(v) = \frac{1}{2} D_1(v, v) - \int\limits_{\Omega_1} f v - \int\limits_{\gamma} g v.$$

Тогда задача минимизации

$$\inf_{v \in S^{\gamma}(\Omega_1)} \Pi_1(v) \tag{3.2}$$

имеет единственное решение. Для доказательства разрешимости задачи (3.2) достаточно установить коэрцитивность функционала Π_1 на $S^{\gamma}(\Omega_1)$, поскольку слабая полунепрерывность функционала очевидна. Имеет место такое утверждение.

Предложение 6. *Существует постоянная $c_3 > 0$ такая, что*

$$D_1(v, v) \ge c_3 \|v\|^2_{H^{2,\gamma}(\Omega_1)} \quad \forall v \in S^{\gamma}(\Omega_1). \tag{3.3}$$

Мы опустим доказательство этого утверждения, так как оно следует рассуждениям, использованным при доказательстве предложения 2.

Поскольку неравенство (3.3) обеспечивает коэрцитивность функционала Π_1 на $S^\gamma(\Omega_1)$, решение задачи (3.2) существует. Это решение удовлетворяет тождеству

$$w \in S^\gamma(\Omega_1), \tag{3.4}$$

$$D_1(w,v) - \int\limits_{\Omega_1} fv - \int\limits_\gamma gv = 0 \quad \forall v \in S^\gamma(\Omega_1). \tag{3.5}$$

Предположим теперь, что заданные функции f, g удовлетворяют условию

$$\int\limits_{\Omega_1} fl + \int\limits_\gamma gl = 0 \quad \forall l \in S^{00}(\Omega_1). \tag{3.6}$$

В этом случае задачу (2.4), (2.5) можно переписать в виде

$$w \in S^\gamma(\Omega_1), \quad D_1(w,v+l) - \int\limits_{\Omega_1} f(v+l) - \int\limits_\gamma g(v+l) = 0 \quad \forall v \in S^\gamma(\Omega_1)\ \forall l \in S^{00}(\Omega_1),$$

или, учитывая предложение 5, в следующем виде:

$$w \in H^{2,\gamma}(\Omega_1), \tag{3.7}$$

$$D_1(w,v) - \int\limits_{\Omega_1} fv - \int\limits_\gamma gv = 0 \quad \forall v \in H^{2,\gamma}(\Omega_1). \tag{3.8}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 5. *При выполнении условия* (3.6) *существует решение задачи* (3.7), (3.8).

Как и ранее, следует заметить, что условие (3.6) не только достаточно, но и необходимо для разрешимости задачи (3.7), (3.8).

Приведем дифференциальную формулировку задачи: найти функции w, $m = \{m_{ij}\}, i,j = 1,2$, определенные в Ω_1, а также функцию $l_0 \in S^{00}(\gamma)$ такие, что

$$-\nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega_1 \setminus \bar\gamma, \tag{3.9}$$

$$m + A\nabla\nabla w = 0 \quad \text{в } \Omega, \tag{3.10}$$

$$m_n = t^n = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{3.11}$$

$$w(0,0) = w(1,0) = 0; \quad w = l_0 \quad \text{на } \gamma, \tag{3.12}$$

$$[w_\nu] = [m_\nu] = 0 \quad \text{на } \gamma, \tag{3.13}$$

$$\int\limits_\gamma gx_2 - \int\limits_\gamma [t^\nu]x_2 = 0. \tag{3.14}$$

Сформулируем результат об эквивалентности формулировок рассмотренных выше задач.

Теорема 6. *На классе гладких решений формулировки* (3.7), (3.8) *и* (3.9)–(3.14) *эквивалентны.*

4. Отслоение жесткого включения

В этом разделе будем считать, что тонкое жесткое включение γ отслаивается от пластины на положительном берегу γ^+. Как и ранее, на внешней границе Γ будут выполнены некоэрцитивные краевые условия. Приведем дифференциальную формулировку соответствующей задачи равновесия: найти функции w, $m = \{m_{ij}\}$, $i,j = 1,2$, определенные в Ω_γ, а также функцию $l_0 \in S(\gamma)$ такие, что

$$-\nabla\nabla m = f \quad \text{в } \Omega_\gamma, \tag{4.1}$$

$$m + A\nabla\nabla w = 0 \quad \text{в } \Omega_\gamma \tag{4.2}$$

$$m_n = t^n = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{4.3}$$

$$m_\nu = 0, \quad w = l_0 \quad \text{на } \gamma^-, \tag{4.4}$$

$$m_\nu = t^\nu = 0 \quad \text{на } \gamma^+, \tag{4.5}$$

$$\int\limits_{\gamma^-} gv - \int\limits_{\gamma^-} t^\nu v = 0 \quad \forall v \in H^{2,\gamma}(\Omega_\gamma). \tag{4.6}$$

Здесь

$$H^{2,\gamma}(\Omega_\gamma) = \{v \in H^2(\Omega_\gamma) \mid v|_{\gamma^-} \in S(\gamma)\}.$$

Пусть также

$$S^\gamma(\Omega_\gamma) = \Big\{v \in H^{2,\gamma}(\Omega_\gamma) \mid \int\limits_{\Omega_\gamma} v = 0,\ \int\limits_{\Omega_\gamma} v_{,i} = 0,\ i = 1,2\Big\},$$

$$S(\Omega_\gamma) = \{l \mid l(x) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2,\ a_i \in \mathbb{R},\ i = 0,1,2;\ x = (x_1,x_2) \in \Omega_\gamma\}.$$

Введем скалярное произведение в пространстве $H^{2,\gamma}(\Omega_\gamma)$,

$$(w,v)_\gamma = \int\limits_{\Omega_\gamma} w \int\limits_{\Omega_\gamma} v + \int\limits_{\Omega_\gamma} \nabla w \nabla v + D_\gamma(w,v), \tag{4.7}$$

где

$$D_\gamma(w,v) = \int\limits_{\Omega_\gamma} a_{ijkl} w_{,kl} v_{,ij}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Предложение 7. *Пространство $H^{2,\gamma}(\Omega_\gamma)$ можно представить в виде прямой суммы подпространств по отношению к скалярному произведению (4.7):*

$$H^{2,\gamma}(\Omega_\gamma) = S(\Omega_\gamma) \oplus S^\gamma(\Omega_\gamma).$$

Доказательство этого утверждения здесь не приводим, так как оно напоминает доказательство предложения 1.

Рассмотрим функционал энергии $\Pi_\gamma: \ H^{2,\gamma}(\Omega_\gamma) \to \mathbb{R}$,

$$\Pi_\gamma(v) = \frac{1}{2} D_\gamma(v,v) - \int\limits_{\Omega_\gamma} fv - \int\limits_{\gamma^-} gv$$

и задачу минимизации

$$\inf_{v \in S^\gamma(\Omega_\gamma)} \Pi_\gamma(v). \tag{4.8}$$

Эта задача имеет единственное решение. Для доказательства существования решения в задаче (4.8) достаточно проверить коэрцитивность функционала Π_γ на $S^\gamma(\Omega_\gamma)$. Можно доказать следующее утверждение.

Предложение 8. *Существует постоянная $c_4 > 0$ такая, что*

$$D_\gamma(v,v) \geq c_4 \|v\|^2_{H^{2,\gamma}(\Omega_\gamma)} \quad \forall v \in S^\gamma(\Omega_\gamma). \tag{4.9}$$

Доказательство этого утверждения также опустим. Соответствующие рассуждения близки к рассуждениям, использованным при доказательстве предложения 2.

Итак, функционал Π_γ коэрцитивен на $S^\gamma(\Omega_\gamma)$ и слабо полунепрерывен снизу. Это означает, что задача (4.8) имеет решение, удовлетворяющее тождеству

$$w \in S^\gamma(\Omega_\gamma), \tag{4.10}$$

$$D_\gamma(w,v) - \int\limits_{\Omega_\gamma} fv - \int\limits_{\gamma^-} gv = 0 \quad \forall v \in S^\gamma(\Omega_\gamma). \tag{4.11}$$

Пусть внешние нагрузки f, g удовлетворяют условию

$$\int\limits_{\Omega_\gamma} fl + \int\limits_{\gamma} gl = 0 \quad \forall l \in S(\Omega_\gamma). \tag{4.12}$$

С учетом (4.12) тождество (4.10), (4.11) можно переписать в виде

$$w \in S^\gamma(\Omega_\gamma), \quad D_\gamma(w, v+l) - \int\limits_{\Omega_\gamma} f(v+l) - \int\limits_{\gamma^-} g(v+l) = 0 \quad \forall v \in S^\gamma(\Omega_\gamma) \; \forall l \in S(\Omega_\gamma),$$

или, учитывая предложение 7, в виде

$$w \in H^{2,\gamma}(\Omega_\gamma), \tag{4.13}$$

$$D_\gamma(w,v) - \int\limits_{\Omega_\gamma} fv - \int\limits_{\gamma^-} gv = 0 \quad \forall v \in H^{2,\gamma}(\Omega_\gamma). \tag{4.14}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 7. *При выполнении условия* (4.12) *существует решение задачи* (4.13), (4.14).

Отметим также, что условие (4.12) не только достаточно для разрешимости задачи (4.13), (4.14), но и необходимо.

Наконец, приведем утверждение об эквивалентности формулировок (4.13), (4.14) и (4.1)–(4.6).

Теорема 8. *На классе гладких решений формулировки* (4.13), (4.14) *и* (4.1)–(4.6) *эквивалентны.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ковтуненко В. А.* Метод численного решения упругой задачи о контакте // Прикл. механика и техн. физика. 1994. Т. 35, № 5. С. 142–146.

2. *Хлуднев А. М., Хоффманн К.-Х., Боткин Н. Д.* Вариационная задача о контакте упругих объектов разных размерностей // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47. № 3. С. 707–717.

3. *Неустроева Н. В.* Жесткое включение в контактной задачи для упругих пластин // Сиб. журн. индустр. математики. 2009. Т. 12. № 4. С. 92–105.

4. *Неустроева Н. В.* Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // Вестник НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 4. С. 51–64.

5. *Хлуднев А. М.* Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 5. С. 98–110.

6. *Хлуднев А. М.* Об изгибе упругой пластины с отслоившимся тонким жестким включением // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 1. С. 114–126.

7. *Khludnev A. M.* Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates // Europ. J. Mech. A/Solids. 2012, V. 32. P. 69–75.

8. *Ротанова Т. А.* О постановках и разрешимости задач о контакте двух пластин, содержащих жесткие включения // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15. № 2. С. 107–118.

9. *Ротанова Т. А.* Задача о контакте двух пластин, каждая из которых содержит жесткие включения // Мат. заметки ЯГУ. 2013. Т. 20. № 1. С. 102–111.

10. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.

11. *Хлуднев А. М.* Задачи теории упругости в негладких областях. М.: Физматлит, 2010.

12. *Рудой Е. М.* Формула Гриффитса и интеграл Черепанова — Райса для пластины с жестким включением и трещиной // Вестник НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 2. С. 98–117.

13. *Shcherbakov V. V.* Shape optimization of rigid inclusions in elastic plates with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67. N 3. article 71.

14. *Titeux I., Sanchez-Palencia E.* Junction of thin plate // Europ. J. Mech. A/Solids. 2000. V. 19. N 3. P. 377–400.

15. *Gaudiello A., Zappale E.* Junction in a thin multidomain for a fourth order problem // Math. Models Methods Appl. Sci. 2006. V. 16, N 12. P. 1887–1918.

16. *Gaudiello A., Zappale E.* A model of joined beams as limit of a 2D plate // J. Elasticity. 2011. V. 103. N 2. P. 205–233.

17. *Фурцев А. И.* Дифференцирование функционала энергии по длине отслоения в задаче о контакте пластины и балки // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 935–949.

18. *Фурцев А. И.* Задача о контакте пластины и балки при наличии сцепления // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22. № 2. С. 105–117.

19. *Rudoy E., Shcherbakov V.* First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks // Appl. Math. Optim. https: //doi.org/10.1007/s00245–020–09729–5.

20. *Lazarev N.P., Itou H.* Equilibrium problem for Kirchhoff–Love plates with nonpenetration conditions for unknown configurations of crack edges // Мат. заметки СВФУ. 2020. Т. 27. № 3. С. 52–65.

21. *Lazarev N. P., Rudoy E. M.* Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // Z. Angew. Math. Mech. 2014. V. 94. P. 730–739.
22. *Lazarev N. P.* Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion // Z. Angew. Math. Phys. 2015. V. 66, N 4. P. 2025–2040.
23. *Attouch H., Buttazzo G., Michaille G.* Variational analysis in Sobolev and BV spaces. Applications to PDEs and optimization. MPS-SIAM Series on Optimization, 2005.
24. *Maz'ya V. G., Poborchi S. V.* Differentiable functions on bad domains. Singapore: World Sci., 1997.

Поступила в редакцию 28 января 2021 г.
После доработки 28 февраля 2021 г.
Принята к публикации 26 августа 2021 г.

Хлуднев Александр Михайлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
khlud@hydro.nsc.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

UDC 539.3+517.958

EQUILIBRIUM PROBLEMS FOR ELASTIC PLATE WITH THIN RIGID INCLUSION AND FREE EDGE

A. M. Khludnev

Abstract: The paper investigates equilibrium problems for an elastic plate containing a thin rigid inclusion in the case of free edge. The inclusion may be delaminated from the elastic plate thus forming an interfacial crack. The considered boundary conditions lead to non-coercive boundary value problems. The cases of possible fixing of the plate at one or two given points are analyzed. Necessary and sufficient conditions for the existence of solutions to the problems under consideration are found.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.64.10.007

Keywords: elastic plate, thin rigid inclusion, delamination, non-coercive boundary value problem.

REFERENCES

1. *Kovtunenko V. A.*, "Method for the numerical solution of the elastic contact problem," J. Appl. Mech. Tech. Phys., **35**, No. 5, 142–146 (1994).

2. *Khludnev A. M., Hoffmann K.-H., and Botkin N. D.*, "The variational contact problem for elastic objects of different dimensions," Sib. Math. J., **47**, No. 3, 584–593 (2006).

3. *Neustroeva N. V.*, "Rigid inclusion in the contact problem for elastic plates [in Russian]," Sib. Zh. Ind. Mat., **12**, No. 4, 92–105 (2009).

4. *Neustroeva N. V.*, "Unilateral contact of elastic plates with rigid inclusion [in Russian]," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., Inform., **9**, No. 4, 51–64 (2009).

5. *Khludnev A. M.*, "Crack problem on the boundary of rigid inclusion in elastic plate," Mech. Solids, No. 5, 98–110 (2010).

6. *Khludnev A. M.*, "Elastic bending delaminated plates with thin rigid inclusion [in Russian]," Sib. Zh. Ind. Mat., **14**, No. 1, 114–126 (2011).

7. *Khludnev A. M.*, "Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates," Eur. J. Mech., A, Solids, **32**, 69–75 (2012).

8. *Rotanova T. A.*, "On the formulation and solvability of problems on the contact of two plates containing rigid inclusions [in Russian]," Sib. Zh. Ind. Mat., **15**, No. 2, 107–118 (2012).

9. *Rotanova T. A.*, "The problem of the contact of two plates containing rigid inclusions [in Russian]," Mat. Zametki SVFU, **20**, No. 1, 102–111 (2013).

10. *Khludnev A. M. and Kovtunenko V. A.*, Analysis of Cracks in Solids, WIT Press, Southampton; Boston (2000).

11. *Khludnev A. M.*, Elasticity Problems in Non-Smooth Domains [in Russian], Fizmatlit, Moscow (2010).

12. *Rudoy E. M.*, "Griffiths formula and Cherepanov–Rice integral for plates with rigid inclusion and crack [in Russian]," Vestn. Novosib. Gos. Univ., Ser. Mat., Mekh., Inform., **10**, No. 2, 98–117 (2010).

13. *Shcherbakov V. V.*, "Shape optimization of rigid inclusions in elastic plates with cracks," Z. Angew. Math. Phys., **67**, No. 3, article 71 (2016).

14. *Titeux I. and Sanchez-Palencia E.*, "Junction of thin plate," Eur. J. Mech., A, Solids, **19**, No. 3, 377–400 (2000).

15. *Gaudiello A. and Zappale E.*, “Junction in a thin multidomain for a fourth order problem,” Math. Models Methods Appl. Sci., **16**, No. 12, 1887–1918 (2006).
16. *Gaudiello A. and Zappale E.*, “A model of joined beams as limit of a 2D plate,” J. Elasticity, **103**, No. 2, 205–233 (2011).
17. *Furtsev A. I.*, “Differentiation of the energy functional with respect to the delamination length in the problem of plate-beam contact,” Sib. Electron. Math. Rep., **15**, 935–949 (2018).
18. *Furtsev A. I.*, “The problem of the contact of a plate and a beam in the presence of adhesion [in Russian],” Sib. Zh. Ind. Mat., **22**, No. 2, 105–117 (2019).
19. *Rudoy E. and Shcherbakov V.*, “First-order shape derivative of the energy for elastic plates with rigid inclusions and interfacial cracks,” Appl. Math. Optim., **84**, 2775–2802 (2021).
20. *Lazarev N. P. and Itou H.*, “Equilibrium problem for Kirchhoff-Love plates with nonpenetration conditions for unknown configurations of crack edges,” Mat. Zametki SVFU, **27**, No. 3, 52–65 (2020).
21. *Lazarev N. P. and Rudoy E. M.*, “Shape sensitivity analysis of Timoshenko’s plate with a crack under the nonpenetration condition,” Z. Angew. Math. Mech., **94**, 730–739 (2014).
22. *Lazarev N. P.*, “Shape sensitivity analysis of the energy integrals for the Timoshenko-type plate containing a crack on the boundary of a rigid inclusion,” Z. Angew. Math. Phys., **66**, No. 4, 2025–2040 (2015).
23. *Attouch H., Buttazzo G., and Michaille G.*, Variational Analysis in Sobolev and BV spaces: Applications to PDEs and Optimization, SIAM (2014).
24. *Maz’ya V. G. and Poborchi S. V.*, Differentiable Functions on Bad Domains, World Sci., Singapore (1998).

Submitted January 28, 2021
Revised February 28, 2021
Accepted August 26, 2021

Alexander M. Khludnev
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics,
Lavrentiev Institute of Hydrodynamics,
15 Lavrentiev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk, 630090, Russia
`khlud@hydro.nsc.ru`