

ПРОИЗВОДНАЯ ЭНЕРГИИ ДЛЯ КОНСТРУКЦИИ, СОСТОЯЩЕЙ ИЗ ПЛАСТИНЫ И ТОНКОЙ БАЛКИ

А. И. Фурцев

Аннотация. Рассматривается новая задача об изгибе конструкции, состоящей из пластины Тимошенко и тонкой балки. Предполагается, что в исходном состоянии пластина и балка соприкасаются вдоль линии. В то же время считается, что на части линии соприкосновения пластина и балка скреплены друг с другом, а на оставшейся части скрепление отсутствует. Вследствие этого при изгибе на части линии прогибы тел могут быть не равны. С целью предотвратить взаимное проникновение между указанными телами используется условие непроникания вида неравенства. Рассмотрены вариационные постановки задачи и изучены свойства вариационного решения. Основным результатом работы является доказательство корректности производной функционала энергии при гладких возмущениях исходной геометрической конфигурации. Найдена явная формула для указанной производной.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.28.91.005

Ключевые слова: контактная задача, пластина Тимошенко, балка, тонкое препятствие, условие непроникания, задача минимизации, вариационное неравенство, односторонние ограничения, анализ чувствительности формы, производная функционала энергии, скорость высвобождения энергии.

1. Введение

Постоянно растущий прогресс в инженерном деле и науке о материалах порождает необходимость в развитии математического инструментария для эффективной разработки и оптимизации неоднородных структур и конструкций. Среди большого разнообразия подобных объектов особое место принадлежит конструкциям, состоящим из пластин и балок, которые находят широкое применение на практике (как по отдельности, так и в составе пластинчатых и балочных систем). В то же время использование вместе пластин и балок приводит к конструкциям с уникальными свойствами и поведением, для описания которых предпочтительно использовать математические модели высокого уровня.

В данной статье мы рассматриваем модель конструкции, состоящей из пластины и тонкой балки с нетривиальными условиями взаимодействия. А именно, конструкция состоит из пластины Тимошенко и балки Бернулли — Эйлера, которые изгибаются и при этом могут взаимодействовать вдоль линии: на части линии предполагается скрепление пластины и балки, их прогибы равны, а на

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90037.

оставшейся части скрепление отсутствует. Поскольку в отсутствие скрепления прогибы тел могут быть не равны, с целью исключить физически нежелательное взаимное проникновение используется условие вида неравенства на прогибы. Тем самым на части линии балка по отношению к пластине фактически выполняет роль тонкого препятствия.

Следует сказать, что задачи о тонких препятствиях с условиями непроникания вида неравенств являются объектом активного интереса математического сообщества. Начало исследования указанного класса задач положено в работах [1, 2], в которых рассматривались простейшие постановки с уравнением Лапласа и основное внимание уделялось вопросам дополнительной регулярности слабых решений вблизи препятствий. Дальнейшее развитие эта тематика нашла в [3–9]. Следует также отметить работы [10, 11], в которых изучались задачи о тонких препятствиях для полигармонического уравнения, а также работы [12–16], в которых рассматривались задачи общего вида с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Особый интерес с точки зрения проблемы, которая будет исследована в настоящей работе, представляет ряд недавних статей [17–23], посвященных систематическому исследованию задач об одностороннем контакте пластин и балок вариационными методами (в данной работе будем придерживаться курса, заданного в перечисленных статьях). В свою очередь, также заслуживает упоминания цикл недавних статей [24–36], посвященных задачам о тонких упругих включениях в упругих телах, поскольку для указанных задач применение вариационных методов также позволило получить большое число важных результатов: рассмотреть в рамках разнообразных моделей задачи о равновесии включений в телах, в том числе при наличии отслоений; исследовать дифференцируемость функционалов энергии по длине отслоений и связанные с производной энергии инвариантные интегралы; изучить широкий спектр задач сопряжения.

Цель данной работы — провести анализ задачи об изгибе конструкции, состоящей из пластины Тимошенко и тонкой балки, которые на части линии соприкосновения скреплены друг с другом, а на другой части заданы условия одностороннего контакта. Работа начинается с изучения в п. 2 различных постановок задачи равновесия конструкции: соответствующей краевой задачи и вариационных постановок. Однако основная цель работы — исследовать дифференцируемость функционала энергии по отношению к возмущениям исходной геометрической конфигурации, при которых изменяется зона с односторонними ограничениями, доказать корректность производной энергии и отыскать явную формулу для нее. Вопросы, связанные с производной функционала энергии, анализируются в п. 3, а их анализ в значительной степени опирается на вариационные формулировки поставленной в п. 2 задачи равновесия и установленные свойства вариационных решений.

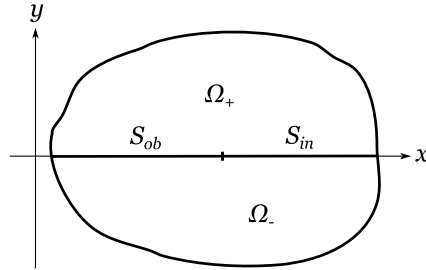


Рис. 1. Геометрия задачи.

2. Постановка задачи равновесия

Геометрия рассматриваемой задачи равновесия изображена на рис. 1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, имеющая непрерывную по Липшицу границу. Введем декартову систему координат Oxy с ортами e_x, e_y . Положим, что область Ω пересекается с осью Ox , образуя при этом отрезок

$$S = (\Omega \cap \{y = 0\}) = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 \mid x_* < x < x_{**}, y = 0\},$$

где $x_*, x_{**} = \text{const}$, $x_* < x_{**}$. Также положим, что Ω разбивается указанным отрезком на непустые подобласти $\Omega_+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ и $\Omega_- = \Omega \cap \{y < 0\}$ с липшицевыми границами. В дальнейшем будем считать, что область Ω соответствует пластине, а S — множеству точек, в которых задаются условия взаимодействия пластины с тонкой балкой. В отношении множества S будем считать также, что оно состоит из двух связанных подмножеств S_{ob} и S_{in} , на которых условия взаимодействия пластины и балки отличаются: на S_{in} задаются условия скрепления, а на S_{ob} считается, что скрепление отсутствует, и задаются условия одностороннего контакта.

Чтобы сформулировать задачу равновесия, введем функции, характеризующие перемещения элементов конструкции. Будем полагать, что перемещения точек пластины при изгибе описываются определяемыми в Ω вектор-функцией $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$, $\varphi_i = \varphi_i(x, y)$, $i = 1, 2$, а также функцией $v = v(x, y)$, $(x, y)^T \in \Omega$. Указанные функции в рамках теории Тимошенко характеризуют соответственно углы поворота поперечных сечений и прогибы пластины. Для описания изгиба балки будет применяться теория Бернулли — Эйлера и перемещения будут описываться определяемой на S функцией прогиба $w = w(x)$, $x \in (x_*, x_{**})$. Всюду в работе будем считать, что функции, определенные на S , являются функциями одной переменной x .

Для описания напряженного состояния пластины Тимошенко при изгибе введем в рассмотрение тензор изгибающих моментов m и вектор перерезающих сил q . Будем считать, что тензор моментов m выражается следующим уравнением состояния:

$$m = m(\varphi) = B\varepsilon(\varphi), \quad (1)$$

где $\varepsilon(\varphi) = 1/2(\nabla\varphi + (\nabla\varphi)^T)$ — тензор малых деформаций. Уравнение состояния,

определяющее вектор перерезающих сил q , имеет вид

$$q = q(\varphi, v) = \Lambda(\varphi - \text{grad } v). \quad (2)$$

(Здесь и далее $\nabla\varphi = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)}$ — это связанная с $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ матрица Якоби, а обозначение $\text{grad } v = \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)^T$ используется для градиента.) В уравнениях (1), (2) заданные тензор четвертого порядка $B = \{b_{ijkl}\}$ и тензор второго порядка $\Lambda = \{\Lambda_{ij}\}$ представляют собой соответственно тензоры модулей изгибной и сдвиговой жесткости пластины. Для их компонент будут считаться выполненными обычные свойства симметричности и положительной определенности:

$$b_{ijkl} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad b_{ijkl} = b_{jikl} = b_{klij}, \quad b_{ijkl}\zeta_{kl}\zeta_{ij} \geq c_0\zeta_{ij}\zeta_{ij} \quad \forall \zeta_{ij} = \zeta_{ji} \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

$$\Lambda_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}, \quad \Lambda_{ij}\rho_j\rho_i \geq c_1\rho_i\rho_i \quad \forall \rho_i \in \mathbb{R}, \quad (4)$$

$i, j, k, l = 1, 2$, $c_0, c_1 = \text{const} > 0$. Наряду с тензорами B и Λ нам понадобится функция b для описания изгибной жесткости балки:

$$b \in C^1(\overline{S}), \quad b \geq c_2, \quad c_2 = \text{const} > 0. \quad (5)$$

Тензоры B , Λ и функция b в совокупности характеризуют жесткость рассматриваемой конструкции.

Приведем краевую задачу, описывающую равновесие конструкции под действием заданных распределенных сил $f \in C^1(\overline{\Omega})$ и $g \in C^1(\overline{S})$: требуется найти функции $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$, v , заданные в Ω , и функцию w , заданную на S , такие, что

$$-\text{div } m(\varphi) + q(\varphi, v) = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad (6)$$

$$\text{div } q(\varphi, v) = f \quad \text{в } \Omega_{\pm}, \quad (7)$$

$$[q(\varphi, v)] \cdot e_y + D_{xx}(b D_{xx}w) = g \quad \text{на } S, \quad (8)$$

$$w = 0, \quad D_x w = 0 \quad \text{на } \partial S, \quad (9)$$

$$[q(\varphi, v)] \cdot e_y \geq 0, \quad (v - w)[q(\varphi, v)] \cdot e_y = 0 \quad \text{на } S_{ob}, \quad (10)$$

$$v - w \geq 0 \quad \text{на } S_{ob}, \quad v - w = 0 \quad \text{на } S_{in}, \quad (11)$$

$$[v] = 0, \quad [\varphi] = 0 \quad \text{на } S, \quad (12)$$

$$v = 0, \quad \varphi = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (13)$$

Здесь и далее скобки $[\cdot]$ используются для описания скачка функции на S , например, $[v] = v^+ - v^-$ на S , где v^{\pm} — сужения на подобласти Ω_{\pm} . Символ D_x используется для обозначения производной по x функций, определенных на S .

Механический смысл приведенной краевой задачи состоит в следующем. Уравнения (6), (7) представляют собой уравнения равновесия пластины Тимошенко, подверженной изгибу под действием распределенной силы f . Уравнение (8) является уравнением равновесия балки Бернулли — Эйлера с учетом действия заданной распределенной силы g и возможного взаимодействия с пластиной. Воздействие пластины на балку выражается величиной $[q(\varphi, v)] \cdot e_y$, характеризующей проекцию скачка перерезающей силы на ось Oy , причем характер

указанного воздействия отличается на множествах S_{in} и S_{ob} . На множестве S_{in} согласно второму соотношению из (11) пластина и балка скреплены: их прогибы равны (при этом проекция скачка перерезающей силы может принимать, вообще говоря, любые значения). На множестве S_{ob} задаются односторонние ограничения: согласно первому соотношению (10) проекция скачка перерезающей силы неотрицательна, а согласно первому условию из (11) прогибы балки не превосходят прогибов пластины, за счет чего предотвращается взаимное проникновение указанных тел. При этом допускается, что в условии непроникания в определенных точках может реализоваться как равенство (тела соприкасаются), так и строгое неравенство, означающее отсутствие контакта. Если в условии непроникания реализуется строгое неравенство, то из второго соотношения (10) следует, что скачок перерезающей силы равен нулю, а значит, при отсутствии контакта воздействие пластины на балку тоже отсутствует (в таком случае согласно (8) на балку воздействует только заданная сила g). Необходимо подчеркнуть, что при постановке задачи зона скрепления тел S_{in} задана заранее, тем не менее точки множества S_{ob} , в которых происходит соприкосновение тел, напротив, заранее неизвестны и могут быть определены только после решения задачи. Сложность рассматриваемой задачи также вызвана нелинейностью краевых условий.

Ввиду сложности задачи равновесия (6)–(13) с точки зрения анализа удобно рассмотреть ее слабые формулировки. Далее в качестве слабых будем использовать вариационные формулировки: задачу минимизации функционала энергии и вариационное неравенство. При этом будем считать, что перемещения элементов конструкции (φ, v, w) принадлежат декартову произведению соболевских пространств $\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)^2 \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S)$. Введем в рассмотрение функционал энергии

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\varphi, v, w) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) d\mu + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \text{grad } v) d\mu \\ & + \frac{1}{2} \int_S b(D_{xx}w)^2 dx - \int_{\Omega} f v d\mu - \int_S g w dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь и далее через $d\mu$ для краткости обозначается $dx dy$. Согласно вариационному принципу минимума потенциальной энергии конструкция, состоящая из частично скрепленных друг с другом пластины и балки, находится в состоянии равновесия, если перемещения ее элементов являются решением следующей задачи минимизации:

$$\text{найти } (\varphi, v, w) \in \mathcal{K}_0 \text{ такой, что } \mathcal{E}(\varphi, v, w) = \min_{(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_0} \mathcal{E}(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}), \quad (15)$$

где множество допустимых перемещений определено следующим образом:

$$\mathcal{K}_0 = \{(\varphi, v, w) \in \mathcal{H} \quad v - w \geq 0 \text{ на } S_{ob}, \quad v - w = 0 \text{ на } S_{in}\}.$$

Поскольку множество \mathcal{K}_0 выпукло, а функционал \mathcal{E} выпуклый и дифференцируемый (по Гато), задача минимизации (15) эквивалентна вариационному неравенству

$$\begin{aligned} (\varphi, v, w) \in \mathcal{K}_0 : \quad & \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\bar{\varphi} - \varphi) d\mu + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\bar{\varphi} - \text{grad } \bar{v}) d\mu \\ & - \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \text{grad } v) d\mu + \int_S b D_{xx} w D_{xx} (\bar{w} - w) dx \\ & - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) d\mu - \int_S g(\bar{w} - w) dx \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Несложно доказать, что задача минимизации (15) имеет единственное решение. Действительно, в указанной задаче на выпуклом и замкнутом подмножестве \mathcal{K}_0 гильбертова пространства \mathcal{H} требуется минимизировать строго выпуклый слабо полунепрерывный снизу функционал \mathcal{E} , поэтому для существования единственного минимума достаточно, чтобы минимизируемый функционал был коэрцитивен. В свою очередь, коэрцитивность \mathcal{E} легко вытекает из следующей леммы.

Лемма 2.1. Пусть m и q определяются равенствами (1), (2), а для тензоров B , Λ , b выполняются свойства (3)–(5). Тогда существует положительная постоянная c_3 такая, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) d\mu + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \text{grad } v) d\mu & \geq c_3 \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + c_3 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}^2, \\ \int_S b (D_{xx} w)^2 dx & \geq c_3 \|w\|_{H_0^2(S)}^2 \end{aligned}$$

для всех элементов (φ, v, w) пространства \mathcal{H} .

Доказательство. Первая оценка следует из положительной определенности тензоров B и Λ , неравенства Коши с «эpsilon», а также неравенств Корна и Пуанкаре — Фридрихса. Вторая оценка вытекает непосредственно из условия положительности величины b и неравенства Пуанкаре — Фридрихса. \square

Таким образом, существует единственное решение задачи минимизации (15). Поскольку задача минимизации эквивалентна вариационному неравенству (16), указанное решение также является решением вариационного неравенства. Как будет продемонстрировано ниже, вариационное решение, о котором идет речь, в то же время является слабым по отношению к краевой задаче (6)–(13).

Покажем, что для вариационного решения в слабом смысле выполняются все соотношения из (6)–(13). Заметим сразу, что поскольку вариационное решение принадлежит множеству \mathcal{K}_0 , для него в смысле почти всюду выполняются условия (9), (11)–(13). Смысл остальных соотношений краевой задачи менее очевиден и требует пояснения. Для начала выберем в вариационном неравенстве (16) тестовые элементы вида $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) = (\varphi, v, w) \pm (\eta, 0, 0)$ и

$(\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w}) = (\varphi, v, w) \pm (0, \chi, 0)$, где функции $\eta \in C_0^\infty(\Omega)^2$ и $\chi \in C_0^\infty(\Omega \setminus S)$ произвольны. В результате такой подстановки получаем равенства

$$\int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\eta) d\mu + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot \eta d\mu = 0, \quad - \int_{\Omega \setminus S} q(\varphi, v) \cdot \text{grad } \chi d\mu = \int_{\Omega \setminus S} f \chi d\mu,$$

означающие, что уравнения равновесия (6) и (7) выполняются в смысле распределений. Остается установить справедливость соотношений (8), (10). Заметим, что гладкость вариационного решения недостаточна, чтобы определить величину $[q(\varphi, v)] \cdot e_y$ на S поточечно, поэтому предварительно требуется придать смысл указанной величине. С этой целью предположим, что дополнительно к гладкости, требуемой в вариационной постановке, для функции v выполняются принадлежности $v|_{\Omega_{\pm}} \in H^2(\Omega_{\pm})$. При таком предположении в подобластях Ω_{\pm} справедливы формулы Грина

$$\int_{\Omega_{\pm}} q(\varphi, v) \cdot \text{grad } \hat{v} d\mu = - \int_{\Omega_{\pm}} \text{div } q(\varphi, v) \hat{v} d\mu + \langle q^{\pm}(\varphi, v), \hat{v} \rangle_{1/2, \partial\Omega_{\pm}}, \quad \hat{v} \in H^1(\Omega_{\pm}), \quad (17)$$

в которых $q^{\pm}(\varphi, v)$ соответственно элементы пространств $H^{-1/2}(\partial\Omega_{\pm})$, сопряженных к $H^{1/2}(\partial\Omega_{\pm})$, а скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, \partial\Omega_{\pm}}$ обозначают двойственность между $H^{-1/2}(\partial\Omega_{\pm})$ и $H^{1/2}(\partial\Omega_{\pm})$. Также введем в рассмотрение пространство

$$H_{00}^{1/2}(S) = \{ \psi \in H_0^{1/2}(S) \mid r^{-1/2} \psi \in L^2(S) \}, \quad r = r(x) = \min\{|x - x_*|, |x - x_{**}|\},$$

и будем пользоваться тем фактом, что произвольная функция ψ принадлежит пространству $H_{00}^{1/2}(S)$ тогда и только тогда, когда для продолжения $\tilde{\psi}$ указанной функции нулем на внешнюю границу $\partial\Omega$ выполняются принадлежности $\tilde{\psi} \in H^{1/2}(\partial\Omega_{\pm})$. Для произвольной $\psi \in H_{00}^{1/2}(S)$ определим функционал $Q(\varphi, v) \in H_{00}^{-1/2}(S)$ по формуле

$$\langle Q(\varphi, v), \psi \rangle_{1/2, S}^{00} = - \langle q^+(\varphi, v), \tilde{\psi} \rangle_{1/2, \partial\Omega_+} - \langle q^-(\varphi, v), \tilde{\psi} \rangle_{1/2, \partial\Omega_-},$$

где скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{1/2, S}^{00}$ обозначают двойственность между $H_{00}^{1/2}(S)$ и $H_{00}^{-1/2}(S)$. Подчеркнем, что если сужения φ^{\pm}, v^{\pm} функций φ, v на подобласти Ω_{\pm} гладкие вплоть до границ, то выполняется равенство

$$Q(\varphi, v) = [q(\varphi, v)] \cdot e_y = q(\varphi^+, v^+) \cdot e_y - q(\varphi^-, v^-) \cdot e_y,$$

в котором значения q понимаются поточечно. Таким образом, введенный функционал Q действительно задает скачок перерезающей силы на S , который для вариационного решения понимается в обобщенном смысле.

Теперь мы в состоянии доказать, что для вариационного решения в обобщенном смысле выполняются соотношения (8), (10). Подставляя последовательно в вариационное неравенство (16) в качестве тестовых элементы $(\overline{\varphi}, \overline{v}, \overline{w}) = (\varphi, v, w) \pm (\hat{\varphi}, 0, 0)$ с произвольной функцией $\hat{\varphi} \in H_0^1(\Omega)^2$, будем иметь тождество

$$\int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\hat{\varphi}) d\mu + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot \hat{\varphi} d\mu = 0,$$

снова воспользовавшись которым в (16), получаем

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\text{grad } \bar{v} - \text{grad } v) d\mu + \int_S b D_{xx} w D_{xx} (\bar{w} - w) dx \\ & - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v) d\mu - \int_S g(\bar{w} - w) dx \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_0. \end{aligned} \quad (18)$$

Применяя здесь формулы Грина (17) для преобразования первого слагаемого, с учетом доказанного ранее уравнения равновесия (7) получим

$$-\langle q^+(\varphi, v), \bar{v} - v \rangle_{1/2, \partial\Omega_+} - \langle q^-(\varphi, v), \bar{v} - v \rangle_{1/2, \partial\Omega_-} + \langle D_{xx}(bD_{xx}w) - g, \bar{w} - w \rangle_{2,S} \geq 0$$

для всех $(\bar{v}, \bar{w}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S) : \bar{v} - \bar{w} \geq 0$ на S_{ob} , $\bar{v} - \bar{w} = 0$ на S_{in} ,

где скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle_{2,S}$ обозначают двойственность между пространством $H_0^2(S)$ и сопряженным к нему $H^{-2}(S)$. С учетом определения функционала Q имеем

$$\langle Q(\varphi, v), \bar{v} - v \rangle_{1/2,S}^{00} + \langle D_{xx}(bD_{xx}w) - g, \bar{w} - w \rangle_{2,S} \geq 0 \quad (19)$$

для всех $(\bar{v}, \bar{w}) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S) : \bar{v} - \bar{w} \geq 0$ на S_{ob} , $\bar{v} - \bar{w} = 0$ на S_{in} .

Докажем (8), (10), поочередно выбирая в (19) тестовые элементы специального вида. Сначала подставим в (19) элемент $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) + (\xi, 0)$ в качестве тестового, где $\xi \in H_0^1(\Omega)$, $\xi \geq 0$ на S_{ob} и $\xi = 0$ на S_{in} . Такая подстановка влечет

$$\langle Q(\varphi, v), \xi \rangle_{1/2,S}^{00} \geq 0,$$

т. е. для вариационного решения в обобщенном смысле выполняется первое условие (10). Далее выберем в (19) тестовые элементы $(\bar{v}, \bar{w}) = (v, w) \pm (\psi, \rho)$, где $(\psi, \rho) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^2(S) : \psi = \rho$ на S . Получаем выражение

$$\langle Q(\varphi, v), \psi \rangle_{1/2,S}^{00} + \langle D_{xx}(bD_{xx}w) - g, \rho \rangle_{2,S} = 0,$$

которое влечет

$$Q(\varphi, v) = D_{xx}(bD_{xx}w) - g \quad \text{в } H^{-2}(S).$$

В указанном смысле для вариационного решения выполняется уравнение (8). Наконец, подставив последовательно в (19) тестовые элементы $(\bar{v}, \bar{w}) = (0, 0)$ и $(\bar{v}, \bar{w}) = 2(v, w)$, находим

$$\langle Q(\varphi, v), v \rangle_{1/2,S}^{00} + \langle D_{xx}(bD_{xx}w) - g, w \rangle_{2,S} = 0,$$

что вместе с (11) означает справедливость второго соотношения (10). Таким образом, показано, что решение вариационного неравенства (16) удовлетворяет всем соотношениям краевой задачи (6)–(13), и продемонстрирован их смысл.

На самом деле так же может быть доказано, что не только решение вариационного неравенства (16) удовлетворяет всем соотношениям краевой задачи (6)–(13), но и, наоборот, любые гладкие функции, для которых выполняются соотношения (6)–(13), удовлетворяют вариационному неравенству (16). Сказанное означает, что вариационное неравенство (вместе с эквивалентной ему задачей минимизации функционала энергии) можно считать слабой постановкой задачи равновесия вида (6)–(13). В следующем разделе именно вариационные постановки будут считаться основными формулировками задачи равновесия, и анализ производной функционала энергии будет опираться именно на них.

3. Производная функционала энергии

Начнем анализ производной функционала энергии с введения координатных преобразований, с помощью которых зададим возмущение исходной конфигурации областей, соответствующих пластине, балке, а также зонам их скрепления и одностороннего контакта. А именно, рассмотрим семейство преобразований вида

$$x^\delta = x + \delta V_1(x, y), \quad y^\delta = y + \delta V_2(x, y), \quad (20)$$

где заданное поле $V = (V_1, V_2)^T$ считается таким, что

$$V_1, V_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp } V_1, V_2 \subset \Omega, \quad V_2 = 0 \text{ на } S. \quad (21)$$

При этом будем предполагать, что $|\delta| \leq \delta_0$, где δ_0 — заданное положительное число, которое мало настолько, что преобразование (20) является диффеоморфизмом. В силу (21) форма областей Ω и S при преобразовании (20) не меняется. В то же время под действием преобразования происходит возмущение множеств S_{ob} и S_{in} , обозначим соответственно через S_{ob}^δ и S_{in}^δ образы этих множеств (рис. 2).

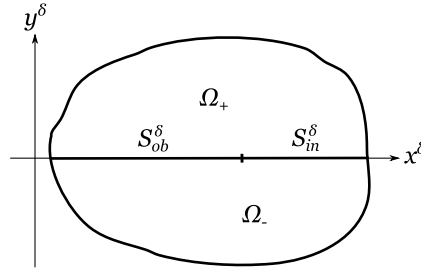


Рис. 2. Возмущенная геометрия.

Для задачи, соответствующей возмущенной геометрии, функционал энергии имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\varphi, v, w) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} m_\delta(\varphi) : \varepsilon_\delta(\varphi) d\mu^\delta + \frac{1}{2} \int_{\Omega} q_\delta(\varphi, v) \cdot (\varphi - \text{grad}_\delta v) d\mu^\delta \\ & + \frac{1}{2} \int_S b(D_{xx}^\delta w)^2 dx^\delta - \int_{\Omega} f v d\mu^\delta - \int_S g w dx^\delta, \end{aligned}$$

где

$$m_\delta(\varphi) = B\varepsilon_\delta(\varphi), \quad q_\delta(\varphi, v) = \Lambda(\varphi - \text{grad}_\delta v), \quad \varepsilon_\delta(\varphi) = \frac{1}{2}(\nabla_\delta \varphi + (\nabla_\delta \varphi)^T),$$

$$\nabla_\delta \varphi = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x^\delta, y^\delta)}, \quad \text{grad}_\delta v = \left(\frac{\partial v}{\partial x^\delta}, \frac{\partial v}{\partial y^\delta} \right)^T, \quad D_x^\delta w = \frac{dw}{dx^\delta},$$

а через $d\mu^\delta$ обозначается $dx^\delta dy^\delta$. При фиксированном параметре δ равновесие конструкции достигается на решении задачи минимизации

$$\text{найти } (\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) \in \mathcal{K}_\delta \text{ такой, что } \mathcal{E}(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) = \min_{(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_\delta} \mathcal{E}(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}), \quad (22)$$

где множество допустимых перемещений определено следующим образом:

$$\mathcal{K}_\delta = \{(\varphi, v, w) \in \mathcal{H} \mid v - w \geq 0 \text{ на } S_{ob}^\delta, v - w = 0 \text{ на } S_{in}^\delta\}.$$

Для каждого δ задача минимизации (22) имеет единственное решение, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\begin{aligned} (\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) \in \mathcal{K}_\delta : & \int_{\Omega} m_\delta(\varphi^\delta) : \varepsilon_\delta(\bar{\varphi} - \varphi^\delta) d\mu^\delta + \int_{\Omega} q_\delta(\varphi^\delta, v^\delta) \cdot (\bar{\varphi} - \text{grad}_\delta \bar{v}) d\mu^\delta \\ & - \int_{\Omega} q_\delta(\varphi^\delta, v^\delta) \cdot (\varphi^\delta - \text{grad}_\delta v^\delta) d\mu^\delta + \int_S b D_{xx}^\delta w^\delta D_{xx}^\delta (\bar{w} - w^\delta) dx^\delta \\ & - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v^\delta) d\mu^\delta - \int_S g(\bar{w} - w^\delta) dx^\delta \geq 0 \quad \text{для всех } (\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{K}_\delta. \end{aligned} \quad (23)$$

При различных значениях параметра δ вариационные решения возмущенной задачи равновесия образуют однопараметрическое семейство, обозначим его через $\{(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta)\}_{|\delta| \leq \delta_0}$. Отметим, что в указанном семействе содержится решение (φ, v, w) невозмущенной задачи, поставленной в предыдущем разделе. Действительно, если положить $\delta = 0$ в вариационных постановках (22), (23), то получим в точности вариационные постановки (15), (16) невозмущенной задачи, следовательно, $(\varphi^0, v^0, w^0) = (\varphi, v, w)$. Согласно определению производная функционала энергии \mathcal{E} в направлении, задаваемом полем V , выражается следующим пределом (если указанный предел существует):

$$\left. \frac{d}{d\delta} \mathcal{E}(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) \right|_{\delta=0} := \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} (\mathcal{E}(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) - \mathcal{E}(\varphi, v, w)). \quad (24)$$

Нашей основной целью является выяснить, действительно ли производная в виде предела (24) корректна, а также найти выражение для нее в явном виде.

При исследовании производной (24) будем использовать подход, который основан на обратной к (20) замене переменных и анализе асимптотического поведения слагаемых функционала энергии. В связи с этим для произвольных функций $p^\delta \in H^1(\Omega)$, $p^\delta = p^\delta(x^\delta, y^\delta)$, $r^\delta \in H^2(S)$, $r^\delta = r^\delta(x^\delta)$ в соответствии с (20) положим

$$\begin{aligned} p_\delta(x, y) &:= p^\delta(x + \delta V_1(x, y), y + \delta V_2(x, y)), \\ r_\delta(x) &:= r^\delta(x + \delta V^0(x)), \quad V^0(x) := V_1(x, 0). \end{aligned} \quad (25)$$

Отметим, что при этом $p_\delta \in H^1(\Omega)$ и $r_\delta \in H^2(S)$.

Поскольку преобразование (20) является диффеоморфизмом, его якобиан

$$J_\delta = 1 + \delta \text{div}(V) + \delta^2 \det(\nabla V) \quad (26)$$

не равен нулю. Для сужения преобразования (20) на ось Ox якобиан

$$j_\delta = 1 + \delta D_x V^0 \quad (27)$$

также не равен нулю. Следовательно, по правилу дифференцирования сложной функции имеем формулы

$$\text{grad}_\delta p^\delta = (\Psi_\delta)^T \text{grad} p_\delta, \quad D_{xx}^\delta r^\delta = k_1(\delta) D_{xx} r_\delta - k_2(\delta) D_x r_\delta,$$

в которых

$$\Psi_\delta = \frac{1}{J_\delta} \begin{pmatrix} 1 + \delta \partial_y V_2 & -\delta \partial_y V_1 \\ -\delta \partial_x V_2 & 1 + \delta \partial_x V_1 \end{pmatrix}, \quad k_1(\delta) = \frac{1}{j_\delta^2}, \quad k_2(\delta) = \frac{\delta D_{xx} V^0}{j_\delta^3}.$$

Также будет необходима формула

$$\varepsilon_\delta(s^\delta) = e(\Psi_\delta; s_\delta) := \frac{1}{2} (\nabla s_\delta \Psi_\delta + (\nabla s_\delta \Psi_\delta)^T), \quad s^\delta \in H^1(\Omega)^2,$$

выражающая правило преобразования тензора малых деформаций.

Приведем ряд полезных для дальнейшего асимптотических разложений.

Предложение 3.1. При фиксированных элементах $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w})$, $(\tilde{\varphi}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in \mathcal{H}$ справедливы асимптотические разложения

$$\int_{\Omega} J_\delta B_\delta e(\Psi_\delta; \bar{\varphi}) : e(\Psi_\delta; \tilde{\varphi}) d\mu = \int_{\Omega} (m(\bar{\varphi}) : \varepsilon(\tilde{\varphi}) + \delta A_1(\bar{\varphi}; \tilde{\varphi})) d\mu + o(\delta) R_1(\bar{\varphi}; \tilde{\varphi}),$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} J_\delta \Lambda_\delta (\bar{\varphi} - (\Psi_\delta)^T \text{grad} \bar{v}) (\tilde{\varphi} - (\Psi_\delta)^T \text{grad} \tilde{v}) d\mu \\ = \int_{\Omega} (q(\bar{\varphi}, \bar{v}) \cdot (\tilde{\varphi} - \text{grad} \tilde{v}) + \delta A_2(\bar{\varphi}, \bar{v}; \tilde{\varphi}, \tilde{v})) d\mu + o(\delta) R_2(\bar{\varphi}, \bar{v}; \tilde{\varphi}, \tilde{v}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_S j_\delta b_\delta (k_1(\delta) D_{xx} \bar{w} - k_2(\delta) D_x \bar{w}) (k_1(\delta) D_{xx} \tilde{w} - k_2(\delta) D_x \tilde{w}) dx \\ = \int_S (b D_{xx} \bar{w} D_{xx} \tilde{w} + \delta A_3(\bar{w}; \tilde{w})) dx + o(\delta) R_3(\bar{w}; \tilde{w}), \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} J_\delta f_\delta \tilde{v} d\mu = \int_{\Omega} (f \tilde{v} + \delta A_4(\tilde{v})) d\mu + o(\delta) R_4(\tilde{v}),$$

$$\int_S j_\delta g_\delta \tilde{w} dx = \int_S (g \tilde{w} + \delta A_5(\tilde{w})) dx + o(\delta) R_5(\tilde{w}).$$

Здесь B_δ , Λ_δ , b_δ , f_δ , g_δ определены аналогично формулам (25). Главные члены разложений выражаются формулами:

$$A_1(\bar{\varphi}; \tilde{\varphi}) := \tilde{B}_V \varepsilon(\bar{\varphi}) : \varepsilon(\tilde{\varphi}) - m(\bar{\varphi}) : e(\nabla V; \tilde{\varphi}) - m(\tilde{\varphi}) : e(\nabla V; \bar{\varphi}),$$

$$\begin{aligned} A_2(\bar{\varphi}, \bar{v}; \tilde{\varphi}, \tilde{v}) := \tilde{\Lambda}_V (\bar{\varphi} - \text{grad} \bar{v}) \cdot (\tilde{\varphi} - \text{grad} \tilde{v}) \\ + q(\bar{\varphi}, \bar{v}) \cdot (\nabla V)^T \text{grad} \tilde{v} + q(\tilde{\varphi}, \tilde{v}) \cdot (\nabla V)^T \text{grad} \bar{v}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A_3(\bar{w}; \tilde{w}) &:= (V^0 D_x b - 3b D_x V^0) D_{xx} \bar{w} D_{xx} \tilde{w} - b D_{xx} V^0 (D_{xx} \bar{w} D_x \tilde{w} + D_x \bar{w} D_{xx} \tilde{w}), \\
 A_4(\tilde{v}) &:= \operatorname{div}(V f) \tilde{v}, \quad A_5(\tilde{w}) := D_x (V^0 g) \tilde{w}, \\
 \tilde{B}_V &:= \operatorname{div}(V) B + V_1 \frac{\partial B}{\partial x} + V_2 \frac{\partial B}{\partial y}, \quad \tilde{\Lambda}_V := \operatorname{div}(V) \Lambda + V_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + V_2 \frac{\partial \Lambda}{\partial y}.
 \end{aligned}$$

а формы R_i , $i = 1, \dots, 5$, задающие остаточные члены, линейны и непрерывны по своим аргументам.

Мы не будем проводить здесь детальное доказательство приведенных в предложении асимптотических разложений. Отметим только, что первое, второе и третье разложения исследовались в [25, 29], а последние два являются следствиями формул Тейлора. Докажем важную для дальнейшего лемму.

Лемма 3.1. Пусть при каждом $|\delta| \leq \delta_0$ элемент $(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta)$ образован из решения $(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta)$ возмущенной задачи (22) по формулам (25). Тогда при $\delta \rightarrow 0$ для семейства $\{(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta)\}_{|\delta| \leq \delta_0}$ выполняется сходимость

$$(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta) \rightarrow (\varphi, v, w) \text{ сильно в } \mathcal{H},$$

где (φ, v, w) — решение невозмущенной задачи (15).

Доказательство. Докажем сначала, что утверждаемая сходимость выполняется в слабом смысле. Для этого достаточно установить, что при $\delta \rightarrow 0$ из семейства элементов $\{(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta)\}_{|\delta| \leq \delta_0}$ можно выделить подпоследовательность, слабо сходящуюся к решению вариационного неравенства (16). С этой целью осуществим обратную к (20) замену переменных в вариационном неравенстве (23) и применим асимптотические разложения из предложения 3.1. Будем иметь (при $|\delta| \leq \delta_0$)

$$\begin{aligned}
 (\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta) \in \mathcal{X}_0 : & \int_{\Omega} m(\varphi_\delta) : \varepsilon(\bar{\varphi} - \varphi_\delta) d\mu + \int_{\Omega} q(\varphi_\delta, v_\delta) \cdot (\bar{\varphi} - \operatorname{grad} \bar{v}) d\mu \\
 & - \int_{\Omega} q(\varphi_\delta, v_\delta) \cdot (\varphi_\delta - \operatorname{grad} v_\delta) d\mu + \int_S b D_{xx} w_\delta D_{xx} (\bar{w} - w_\delta) dx \\
 & - \int_{\Omega} f(\bar{v} - v_\delta) d\mu - \int_S g(\bar{w} - w_\delta) dx + G(\delta; \varphi_\delta, v_\delta, w_\delta; \bar{\varphi} - \varphi_\delta, \bar{v} - v_\delta, \bar{w} - w_\delta) \geq 0
 \end{aligned} \tag{28}$$

для всех $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{X}_0$. Здесь

$$G(\delta; \bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}; \tilde{\varphi}, \tilde{v}, \tilde{w}) := \delta G_A(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}; \tilde{\varphi}, \tilde{v}, \tilde{w}) + o(\delta) G_R(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}; \tilde{\varphi}, \tilde{v}, \tilde{w}),$$

$$\begin{aligned}
 G_A(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}; \tilde{\varphi}, \tilde{v}, \tilde{w}) &:= \int_{\Omega} A_1(\bar{\varphi}; \tilde{\varphi}) d\mu + \int_{\Omega} A_2(\bar{v}; \tilde{v}) d\mu \\
 &+ \int_S A_3(\bar{w}; \tilde{w}) dx - \int_{\Omega} A_4(\tilde{v}) d\mu - \int_S A_5(\tilde{w}) dx,
 \end{aligned}$$

$$G_R(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}; \tilde{\varphi}, \tilde{v}, \tilde{w}) := R_1(\bar{\varphi}; \tilde{\varphi}) + R_2(\bar{v}; \tilde{v}) + R_3(\bar{w}; \tilde{w}) - R_4(\tilde{v}) - R_5(\tilde{w}).$$

Важно отметить, что определенные таким образом формы G_A , G_R линейны и непрерывны по аргументам $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w})$, $(\tilde{\varphi}, \tilde{v}, \tilde{w}) \in \mathcal{H}$. Теперь выберем в (28) элементы $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) = (0, 0, 0)$ и $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) = 2(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta)$ в качестве тестовых. Получим

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m(\varphi_\delta) : \varepsilon(\varphi_\delta) d\mu + \int_{\Omega} q(\varphi_\delta, v_\delta) \cdot (\varphi_\delta - \text{grad } v_\delta) d\mu + \int_S b(D_{xx}w_\delta)^2 dx \\ = \int_{\Omega} f v_\delta d\mu + \int_S g w_\delta dx - G(\delta; \varphi_\delta, v_\delta, w_\delta; \varphi_\delta, v_\delta, w_\delta). \end{aligned} \quad (29)$$

Отсюда, оценивая снизу левую часть с помощью леммы 2.1, а правую часть оценивая сверху с учетом неравенства Коши — Буняковского и непрерывности форм G_A , G_R , при $|\delta| \leq \delta_0$ находим оценки

$$\|\varphi_\delta\|_{H_0^1(\Omega)^2} \leq c_4, \quad \|v_\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \leq c_4, \quad \|w_\delta\|_{H_0^2(S)} \leq c_4, \quad (30)$$

в которых постоянная $c_4 > 0$ не зависит от δ . Указанные оценки позволяют извлечь из семейства $\{(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta)\}_{|\delta| \leq \delta_0}$ такую подпоследовательность (сохраним для нее прежнее обозначение), что

$$(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta) \rightarrow (\varphi, v, w) \text{ слабо в } \mathcal{H}$$

при $\delta \rightarrow 0$. Одновременно с этим структура формы G и оценки (30) влекут, что при $\delta \rightarrow 0$ выполняется сходимость

$$G(\delta; \varphi_\delta, v_\delta, w_\delta; \bar{\varphi} - \varphi_\delta, \bar{v} - v_\delta, \bar{w} - w_\delta) \rightarrow 0 \text{ для всех } (\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}) \in \mathcal{H}, \quad (32)$$

поэтому, переходя к верхнему пределу в левой части неравенства (28), получаем вариационное неравенство (16). Отсюда следует, что предельный в (31) элемент действительно является решением невозмущенной задачи (15). Остается усилить полученную сходимость. С этой целью заметим, что для предельного элемента, так как он удовлетворяет вариационному неравенству (16), справедливо тождество

$$\int_{\Omega} f v d\mu + \int_S g w dx = \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) d\mu + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \text{grad } v) d\mu + \int_S b(D_{xx}w)^2 dx,$$

поэтому, переходя к пределу в правой части (29) с учетом сходимостей (31) и (32), легко получить сходимость

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m(\varphi_\delta) : \varepsilon(\varphi_\delta) d\mu + \int_{\Omega} q(\varphi_\delta, v_\delta) \cdot (\varphi_\delta - \text{grad } v_\delta) d\mu + \int_S b(D_{xx}w_\delta)^2 dx \\ \rightarrow \int_{\Omega} m(\varphi) : \varepsilon(\varphi) d\mu + \int_{\Omega} q(\varphi, v) \cdot (\varphi - \text{grad } v) d\mu + \int_S b(D_{xx}w)^2 dx \end{aligned}$$

при $\delta \rightarrow 0$. Указанная сходимость с учетом леммы 2.1 означает, что выполняется сходимость норм

$$\|\varphi_\delta\|_{H_0^1(\Omega)^2} \rightarrow \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega)^2}, \quad \|v_\delta\|_{H_0^1(\Omega)} \rightarrow \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \quad \|w_\delta\|_{H_0^2(S)} \rightarrow \|w\|_{H_0^2(S)}$$

при $\delta \rightarrow 0$. По известному свойству гильбертовых пространств полученная сходимость норм и слабая сходимость (31) вместе влекут требуемую сильную сходимость. \square

Теперь мы в состоянии доказать, что производная функционала энергии в виде предела (24) существует и найти явную формулу для нее. Для начала, пользуясь предложением 3.1, получим для функционала энергии асимптотическое разложение по малому параметру δ . Будем иметь

$$\mathcal{E}(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) = \mathcal{E}_\delta(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta) := \mathcal{E}(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta) + \delta A(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta) + o(\delta)R(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta), \quad (33)$$

где главный член разложения определяется по формуле

$$A(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_1(\varphi_\delta; \varphi_\delta) d\mu + \frac{1}{2} \int_{\Omega} A_2(\varphi_\delta, v_\delta; \varphi_\delta, v_\delta) d\mu + \frac{1}{2} \int_S A_3(w_\delta; w_\delta) dx - \int_{\Omega} A_4(v_\delta) d\mu - \int_S A_5(w_\delta) dx, \quad (34)$$

а для остаточного члена справедливо выражение

$$R(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta) := \frac{1}{2}R_1(\varphi_\delta; \varphi_\delta) + \frac{1}{2}R_2(\varphi_\delta, v_\delta; \varphi_\delta, v_\delta) + \frac{1}{2}R_3(w_\delta; w_\delta) - R_4(v_\delta) - R_5(w_\delta).$$

Чтобы вычислить предел (24), получим оценки снизу и сверху для величины $1/\delta(\mathcal{E}(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) - \mathcal{E}(\varphi, v, w))$. Положим для определенности, что $\delta > 0$. Так как элементы (φ, v, w) и $(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta)$ являются решениями задач минимизации (15) и (22) соответственно, выполняются неравенства

$$\mathcal{E}(\varphi, v, w) \leq \mathcal{E}(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w}), \quad \mathcal{E}_\delta(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta) \leq \mathcal{E}_\delta(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w})$$

для всех элементов $(\bar{\varphi}, \bar{v}, \bar{w})$ из \mathcal{K}_0 . При этом в первом неравенстве в качестве тестового элемента можно выбрать $(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta)$, а во втором взять (φ, v, w) . Отсюда, учитывая $\delta > 0$, получаем цепочку оценок

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta) - \mathcal{E}(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta)) &\leq \frac{1}{\delta}(\mathcal{E}(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) - \mathcal{E}(\varphi, v, w)), \\ \frac{1}{\delta}(\mathcal{E}(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) - \mathcal{E}(\varphi, v, w)) &\leq \frac{1}{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\varphi, v, w) - \mathcal{E}(\varphi, v, w)). \end{aligned} \quad (35)$$

Лемма 3.1 и формула (33) позволяют перейти к пределу при $\delta \rightarrow 0+$ в левой и правой частях полученных оценок:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta) - \mathcal{E}(\varphi_\delta, v_\delta, w_\delta)) &\rightarrow A(\varphi, v, w), \\ \frac{1}{\delta}(\mathcal{E}_\delta(\varphi, v, w) - \mathcal{E}(\varphi, v, w)) &\rightarrow A(\varphi, v, w). \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме о пределе промежуточной последовательности

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{1}{\delta}(\mathcal{E}(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) - \mathcal{E}(\varphi, v, w)) = A(\varphi, v, w). \quad (36)$$

Таким образом, правосторонняя производная функционала \mathcal{E} действительно существует и однозначно выражается с помощью главных членов асимптотических разложений из предложения 3.1. При анализе левосторонней производной, когда $\delta < 0$, неравенства вида (35) выполняются с противоположными знаками, тем не менее, применяя схожие рассуждения, приходим к такому же предельному соотношению для левой производной, как и для правой:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^-} \frac{1}{\delta} (\mathcal{E}(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) - \mathcal{E}(\varphi, v, w)) = A(\varphi, v, w). \quad (37)$$

Комбинируя (36) и (37), а также определение (34) главного члена асимптотического разложения, имеем следующий результат.

Теорема 3.1. *Производная функционала энергии в виде предела (24) существует и выражается формулой*

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{d\delta} \mathcal{E}(\varphi^\delta, v^\delta, w^\delta) \right|_{\delta=0} &= \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \tilde{B}_V \varepsilon(\varphi) : \varepsilon(\varphi) - m(\varphi) : e(\nabla V; \varphi) \right. \\ &+ \frac{1}{2} \tilde{\Lambda}_V (\varphi - \text{grad } v) \cdot (\varphi - \text{grad } v) + q(\varphi, v) \cdot (\nabla V)^T \text{grad } v - \text{div}(Vf)v \Big) d\mu \\ &+ \int_S \left(\frac{1}{2} (V^0 D_x b - 3b D_x V^0) (D_{xx} w)^2 - b D_{xx} V^0 D_{xx} w D_x w - D_x (V^0 g) w \right) dx. \end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{B}_V = \text{div}(V)B + V_1 \frac{\partial B}{\partial x} + V_2 \frac{\partial B}{\partial y}, \quad \tilde{\Lambda}_V = \text{div}(V)\Lambda + V_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial x} + V_2 \frac{\partial \Lambda}{\partial y},$$

векторное поле $V = (V_1, V_2)^T$ удовлетворяет требованиям (21), а через V^0 обозначено сужение указанного поля на ось абсцисс: $V^0(x) = V_1(x, 0)$.

Обратим внимание на то, что для выражения найденной формулы производной функционала энергии используется поле V , задающее возмущение исходной геометрической конфигурации. Важно отметить, что производная не зависит от конкретного выбора V . Действительно, можно выбрать любое поле V , удовлетворяющее условиям (21), построить координатное преобразование вида (20) и с его помощью, придерживаясь рассуждений, подобных проделанным выше, осуществить переход к возмущенной геометрической конфигурации. Решение задач (22), (23), которые ставятся в возмущенной геометрии при фиксированном δ , существует, единственно и на самом деле не зависит от V , так как для доказательства теоремы существования конкретный способ построения возмущенных областей не важен. Следовательно, определение производной (24) тоже не зависит от конкретного выбора поля V , поэтому при любом допустимом поле V можно повторить предшествующие теореме 3.1 выкладки и в результате прийти к одной и той же формуле для производной при любом допустимом V .

ЛИТЕРАТУРА

1. Lewy H. On a variational problem with inequalities on the boundary // J. Math. Mech. 1968. V. 17, N 9. P. 861–884.
2. Lewy H. On the coincidence set in variational inequalities // J. Differ. Geom. 1971. V. 6. P. 497–501.
3. Frehse J. Two dimensional variational problems with thin obstacles // Math. Z. 1973. Bd 143. S. 279–288.
4. Frehse J. On Signorini's problem and variational problems with thin obstacles // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. 1977. V. 4, N 2. P. 343–362.
5. Richardson D. Variational problems with thin obstacles. Vancouver: Univ. British Columbia, 1978.
6. Caffarelli L. A. Further regularity for the Signorini problem // Commun. Partial Differ. Equ. 1979. V. 4, N 9. P. 1067–1075.
7. Athanasopoulos I., Caffarelli L. A. Optimal regularity of lower-dimensional obstacle problems // J. Math. Sci. 2006. V. 132, N 3. P. 274–284.
8. Athanasopoulos I., Caffarelli L. A., Salsa S. The structure of the free boundary for lower dimensional obstacle problems // Amer. J. Math. 2008. V. 130, N 2. P. 485–498.
9. Petrosyan A., Shahgholian H., Ural'tseva N. N. Regularity of free boundaries in obstacle-type problems. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2012.
10. Schild B. A regularity result for polyharmonic variational inequalities with thin obstacles // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. 1984. V. 11, N 1. P. 87–122.
11. Schild B. On the coincidence set in biharmonic variational inequalities with thin obstacles // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. 1986. V. 13, N 4. P. 559–616.
12. Ural'tseva N. N. Regularity of solutions of variational inequalities // Russ. Math. Surv. 1987. V. 42, N 6. P. 191–219.
13. Ural'tseva N. N. An estimate of the derivatives of the solutions of variational inequalities // J. Soviet Math. 1987. V. 45, N 3. P. 1181–1191.
14. Guillen N. Optimal regularity for the Signorini problem // Calc. Var. Partial Differ. Equ. 2009. V. 36, N 4. P. 533–546.
15. Garofalo N., Garcia M. S. V. New monotonicity formulas and the optimal regularity in the Signorini problem with variable coefficients // Adv. Math. 2014. V. 262. P. 682–750.
16. Koch H., Riland A., Shi W. The variable coefficient thin obstacle problem: Carleman inequalities // Adv. Math. 2016. V. 301. P. 820–866.
17. Khludnev A. M., Hoffmann K. H., Botkin N. D. The variational contact problem for elastic objects of different dimensions // Sib. Math. J. 2006. V. 47, N 3. P. 584–593.
18. Khludnev A., Leugering G. Unilateral contact problems for two perpendicular elastic structures // Z. Anal. Anwend. 2008. Bd 27, Heft 2. S. 157–177.
19. Khludnev A., Tani A. Unilateral contact problem for two inclined elastic bodies // Eur. J. Mech. A, Solids. 2008. V. 27. P. 365–377.
20. Фурцев А. И. Дифференцирование функционала энергии по длине отслоения в задаче о контакте пластины и балки // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 935–949.
21. Furtsev A. I. On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion // J. Math. Sci. 2019. V. 237, N 4. P. 530–545.
22. Furtsev A. I. A contact problem for a plate and a beam in the presence of adhesion // J. Appl. Ind. Math. 2019. V. 13, N 2. P. 208–218.
23. Фурцев А. И. Задача об одностороннем контакте пластины Тимошенко и тонкого упругого препятствия // Сиб. электрон. мат. изв. 2020. Т. 17. С. 364–379.
24. Khludnev A., Negri M. Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body // Z. Angew. Math. Mech. 2012. Bd 92, Heft 5. S. 341–354.
25. Lazarev N. P., Rudoy E. M. Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition // Z. Angew. Math. Mech. 2014. Bd 94, Heft 9. S. 730–739.
26. Khludnev A. M. A weakly curved inclusion in an elastic body with separation // Mech. Solids. 2015. V. 50, N 5. P. 591–601.
27. Itou H., Khludnev A. M. On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies // Math. Meth. Appl. Sci. 2016. V. 39, N 17. P. 4980–4993.

28. Shcherbakov V. V. The Griffith formula and J -integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions // *Z. Angew. Math. Mech.* 2016. Bd 96, Heft 11. S. 1306–1317.
29. Khludnev A. M., Shcherbakov V. V. Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler–Bernoulli inclusions // *Math. Mech. Solids*. 2017. V. 22, N 11. P. 2180–2195.
30. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Об иерархии тонких включений в упругих телах // *Мат. заметки СВФУ*. 2016. Т. 23, № 1. С. 87–107.
31. Хлуднев А. М., Попова Т. С. Задача сопряжения упругого включения Тимошенко и полужесткого включения // *Мат. заметки СВФУ*. 2018. Т. 25, № 1. С. 73–89.
32. Kazarinov N. A., Rudoy E. M., Slesarenko V. Yu., Shcherbakov V. V. Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion // *Comput. Math. Math. Phys.* 2018. V. 58, N 5. P. 761–774.
33. Rudoy E. Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions // *Technologies*. 2020. V. 8, N 4. 59.
34. Khludnev A., Esposito A. C., Faella L. Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions // *J. Optim. Theory Appl.* 2020. V. 84, N 1. P. 293–314.
35. Khludnev A. M., Popova T. S. On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body // *Z. Angew. Math. Mech.* 2020. Bd 100, Heft 8. e202000063.
36. Рудой Е. М., Итогу Х., Лазарев Н. П. Асимптотическое обоснование моделей тонких включений в упругом теле в рамках антиплоского сдвига // *Сиб. журн. индустр. математики*. 2021. Т. 24, № 1. С. 103–119.

Поступила в редакцию 1 февраля 2021 г.

После доработки 24 февраля 2021 г.

Принята к публикации 26 мая 2021 г.

Фурцев Алексей Игоревич (ORCID 0000–0002–3945–6190)
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
al.furtsev@mail.ru

ENERGY DERIVATIVE FOR A CONSTRUCTION
CONSISTING OF A TIMOSHENKO
PLATE AND A THIN BEAM

A. I. Furtsev

Abstract: The paper considers a new problem on the bending of a structure consisting of a Timoshenko plate and a thin beam. It is assumed that in the initial state the plate and the beam are in contact along the line. At the same time, the plate and the beam are bonded to each other on a part of the line, but there is no bonding on a remaining part. As a result, the deflections of the bodies may not be equal on one of the line parts. In order to prevent mutual penetration between the bodies, the non-penetration condition of the inequality type is used. Variational formulations of the problem are considered and the properties of a variational solution are studied. The main result of the work is the proof of the correctness of the energy functional derivative with respect to smooth perturbations of the original geometric configuration. An explicit formula for this derivative is also found in the work.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.28.91.005

Keywords: contact problem, Timoshenko plate, beam, thin obstacle, non-penetration condition, minimization problem, variational inequality, unilateral constraints, shape sensitivity analysis, energy functional derivative, energy release rate.

REFERENCES

1. Lewy H., "On a variational problem with inequalities on the boundary," *J. Math. Mech.*, **17**, No. 9, 861–884 (1968).
2. Lewy H., "On the coincidence set in variational inequalities," *J. Differ. Geom.*, **6**, 497–501 (1971).
3. Frehse J., "Two dimensional variational problems with thin obstacles," *Math. Z.*, **143**, 279–288 (1975).
4. Frehse J., "On Signorini's problem and variational problems with thin obstacles," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.*, **4**, No. 2, 343–362 (1977).
5. Richardson D., *Variational Problems with Thin Obstacles*, Univ. British Columbia, Vancouver (1978).
6. Caffarelli L. A., "Further regularity for the Signorini problem," *Commun. Partial Differ. Equ.*, **4**, No. 9, 1067–1075 (1979).
7. Athanasopoulos I. and Caffarelli L. A., "Optimal regularity of lower-dimensional obstacle problems," *J. Math. Sci.*, **132**, No. 3, 274–284 (2006).
8. Athanasopoulos I., Caffarelli L. A., and Salsa S., "The structure of the free boundary for lower dimensional obstacle problems," *Amer. J. Math.*, **130**, No. 2, 485–498 (2008).
9. Petrosyan A., Shahgholian H., and Ural'tseva N. N., *Regularity of Free Boundaries in Obstacle-Type Problems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2012).
10. Schild B., "A regularity result for polyharmonic variational inequalities with thin obstacles," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.*, **11**, No. 1, 87–122 (1984).

11. Schild B., "On the coincidence set in biharmonic variational inequalities with thin obstacles," *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci.*, **13**, No. 4, 559–616 (1986).
12. Ural'tseva N. N., "Regularity of solutions of variational inequalities," *Russ. Math. Surv.*, **42**, No. 6, 191–219 (1987).
13. Ural'tseva N. N., "An estimate of the derivatives of the solutions of variational inequalities," *J. Soviet Math.*, **45**, No. 3, 1181–1191 (1987).
14. Guillen N., "Optimal regularity for the Signorini problem," *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, **36**, No. 4, 533–546 (2009).
15. Garofalo N. and Garcia M. S. V., "New monotonicity formulas and the optimal regularity in the Signorini problem with variable coefficients," *Adv. Math.*, **262**, 682–750 (2014).
16. Koch H., Rüländ A., and Shi W., "The variable coefficient thin obstacle problem: Carleman inequalities," *Adv. Math.*, **301**, 820–866 (2016).
17. Khludnev A. M., Hoffmann K. H., and Botkin N. D., "The variational contact problem for elastic objects of different dimensions," *Sib. Math. J.*, **47**, No. 3, 584–593 (2006).
18. Khludnev A. and Leugering G., "Unilateral contact problems for two perpendicular elastic structures," *Z. Anal. Anwend.*, **27**, No. 2, 157–177 (2008).
19. Khludnev A. and Tani A., "Unilateral contact problem for two inclined elastic bodies," *Eur. J. Mech. A, Solids*, **27**, 365–377 (2008).
20. Furtsev A. I., "Differentiation of energy functional with respect to delamination's length in problem of contact between plate and beam [in Russian]," *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **15**, 935–949 (2018).
21. Furtsev A. I., "On contact between a thin obstacle and a plate containing a thin inclusion," *J. Math. Sci.*, **237**, No. 4, 530–545 (2019).
22. Furtsev A. I., "A contact problem for a plate and a beam in the presence of adhesion," *J. Appl. Ind. Math.*, **13**, No. 2, 208–218 (2019).
23. Furtsev A. I., "The unilateral contact problem for a Timoshenko plate and a thin elastic obstacle [in Russian]," *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, **17**, 364–379 (2020).
24. Khludnev A. and Negri M., "Crack on the boundary of a thin elastic inclusion inside an elastic body," *Z. Angew. Math. Mech.*, **92**, No. 5, 341–354 (2012).
25. Lazarev N. P. and Rudoy E. M., "Shape sensitivity analysis of Timoshenko's plate with a crack under the nonpenetration condition," *Z. Angew. Math. Mech.*, **94**, No. 9, 730–739 (2014).
26. Khludnev A. M., "A weakly curved inclusion in an elastic body with separation," *Mech. Solids*, **50**, No. 5, 591–601 (2015).
27. Itou H. and Khludnev A. M., "On delaminated thin Timoshenko inclusions inside elastic bodies," *Math. Methods Appl. Sci.*, **39**, No. 17, 4980–4993 (2016).
28. Shcherbakov V. V., "The Griffith formula and J-integral for elastic bodies with Timoshenko inclusions," *Z. Angew. Math. Mech.*, **96**, No. 11, 1306–1317 (2016).
29. Khludnev A. M. and Shcherbakov V. V., "Singular path-independent energy integrals for elastic bodies with Euler–Bernoulli inclusions," *Math. Mech. Solids*, **22**, No. 11, 2180–2195 (2017).
30. Khludnev A. M. and Popova T. S., "On the hierarchy of thin delaminated inclusions in elastic bodies [in Russian]," *Mat. Zametki SVFU*, **23**, No. 1, 87–107 (2016).
31. Khludnev A. M. and Popova T. S., "On junction problem for elastic Timoshenko inclusion and semi-rigid inclusion [in Russian]," *Mat. Zametki SVFU*, **25**, No. 1, 73–89 (2018).
32. Kazarinov N. A., Rudoy E. M., Slesarenko V. Yu., and Shcherbakov V. V., "Mathematical and numerical simulation of equilibrium of an elastic body reinforced by a thin elastic inclusion," *Comput. Math. Math. Phys.*, **58**, No. 5, 761–774 (2018).
33. Rudoy E., "Asymptotic justification of models of plates containing inside hard thin inclusions," *Technologies*, **8**, No. 4, 59 (2020).
34. Khludnev A., Esposito A. C., and Faella L., "Optimal control of parameters for elastic body with thin inclusions," *J. Optim. Theory Appl.*, **84**, No. 1, 293–314 (2020).
35. Khludnev A. M. and Popova T. S., "On junction problem with damage parameter for Timoshenko and rigid inclusions inside elastic body," *Z. Angew. Math. Mech.*, **100**, No. 8, e2020-00063 (2020).
36. Rudoy E. M., Itou H., and Lazarev N. P., "Asymptotic justification of models of thin inclusions in an elastic bodies in antiplane shear problem," *J. Appl. Ind. Math.*, **15**, No. 1, 129–140

(2021).

Submitted February 1, 2021

Revised February 24, 2021

Accepted May 26, 2021

Alexey I. Furtsev (ORCID 0000-0002-3945-6190)
Lavrentiev Institute of Hydrodynamics,
15 Lavrentiev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
al.furtsev@mail.ru