Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

УДК 514.765

УРАВНЕНИЕ ЭЙНШТЕЙНА НА ТРЕХМЕРНЫХ ЛОКАЛЬНО ОДНОРОДНЫХ (ПСЕВДО)РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ВЕКТОРНЫМ КРУЧЕНИЕМ

П. Н. Клепиков,
Е. Д. Родионов, О. П. Хромова

Аннотация. Впервые метрическая связность с векторным кручением, или полусимметрическая метрическая связность, была открыта Э. Картаном. Позднее свойства данной связности изучали многие математики. Так, например, К. Яно, И. Агрикола и другие математики исследовали свойства тензора кривизны, геодезические линии, а также поведение связности при конформных деформациях исходной метрики.

В данной работе исследуется уравнение Эйнштейна на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях с метрической связностью с инвариантным векторным кручением. Доказана теорема о том, что все такие многообразия либо являются многообразиями Эйнштейна относительно связности Леви-Чивита, либо конформно плоские. Ранее авторами исследовалось уравнение Эйнштейна в случае трехмерных локально симметрических (псевдо)римановых многообразий.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.26.84.003

Ключевые слова: алгебры Ли, векторное кручение, инвариантные (псевдо)римановы метрики, локально однородные пространства, многообразия Эйнштейна.

1. Введение и основные результаты

Пусть (M, g) — (псевдо)риманово многообразие. Определим на данном многообразии метрическую связность ∇ с помощью формулы

$$\nabla_X Y = \nabla^g_X Y + g(X, Y)V - g(V, Y)X, \tag{1}$$

где V — некоторое фиксированное векторное поле, X и Y — произвольные векторные поля, ∇^g — связность Леви-Чивита. Связность ∇ является одной из трех основных связностей, описанных Э. Картаном в [1], и называется *метрической связностью с векторным кручением* или *полусимметрической связностью* (с точностью до направления).

Данная связность играет важную роль в случае двумерных поверхностей, так как в этом случае любая метрическая связность является связностью с

Работа выполнена при поддержке РНФ (грант № 22–21–00111 «Псевдоримановы многообразия с ограничениями на тензор Риччи»).

векторным кручением [1]. В работах [2–7] изучаются различные аспекты метрических связностей с векторным кручением.

Важная теорема о связи конформных деформаций и метрических связностей с векторным кручением доказана К. Яно в [8].

Теорема 1. *Риманово многообразие допускает метрическую связность с векторным кручением, тензор кривизны которой равен нулю, тогда и только тогда, когда оно является конформно плоским.*

Данная теорема также обобщается и на случай псевдоримановой метрики, так как доказательство не использует положительную определенность метрического тензора.

Тензор кривизны связности ∇ определяется равенством

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z,$$

а тензор Риччи — равенством

$$r(X,Y) = \mathrm{tr}(Z \to R(X,Z)Y).$$

Отметим, что в отличие от случая связности Леви-Чивита в данном случае тензор Риччи не обязан быть симметричным. Однако верна

Теорема 2 [9, 10]. *Пусть (M,g) — (псевдо)риманово многообразие с метрической связностью с векторным кручением. Тогда тензор Риччи является симметричным тогда и только тогда, когда 1-форма π замкнута (т. е. $d\pi = 0$), где*

$$\pi(X) = g(X,V),$$

для любого векторного поля X на M.

В случае (псевдо)римановых многообразий со связностью Леви-Чивита достаточно известны многообразия постоянной кривизны Риччи или многообразия Эйнштейна (см., например, известный обзор [11]). Они допускают несколько обобщений на случай многообразий с метрической связностью с векторным кручением [12].

Определение 1. (Псевдо)риманово многообразие (M,g) с метрической связностью с векторным кручением будем называть *многообразием Эйнштейна*, если тензор Риччи удовлетворяет уравнению Эйнштейна

$$r = \Lambda g \tag{2}$$

для некоторой скалярной функции Λ.

Основным результатом данной работы является

Теорема 3. *Если для трехмерного (псевдо)риманова локально однородного пространства с метрической связностью с инвариантным векторным кручением выполняется уравнение Эйнштейна, то векторное поле V тривиально или тензор кривизны равен нулю.*

Так как условие тривиальности векторного поля V равносильно тому, что данная связность является связностью Леви-Чивита в силу (1), а условие тривиальности тензора кривизны по теореме 1 эквивалентно тому, что группа конформно плоская, немедленным следствием теоремы 3 является

Теорема 4. *Если трехмерное локально однородное (псевдо)риманово пространство допускает такую метрическую связность с инвариантным векторным кручением, что выполняется уравнение Эйнштейна, то оно является многообразием Эйнштейна относительно связности Леви-Чивита или является конформно плоским.*

2. Предварительные сведения

Пусть далее (M, g) — трехмерное локально однородное (псевдо)риманово пространство. Зафиксируем некоторое инвариантное векторное поле V, с помощью которого определим на M метрическую связность ∇ с векторным кручением. Аналогично общему случаю определим тензор кривизны R и тензор Риччи r.

Отметим, что в трехмерном случае равенство нулю тензора кривизны R равносильно занулению тензора Риччи r в силу того, что в размерности три тензор Вейля всегда равен нулю как для связности Леви-Чивита, так и для метрической связности с векторным кручением (см. [12]). Таким образом, для трехмерного многообразия Эйнштейна равенство нулю тензора кривизны эквивалентно условию $\Lambda = 0$.

Исследование уравнения Эйнштена на трехмерных локально однородных (псевдо)римановых многообразиях основывается на следующей теореме, которая была доказана в римановом случае в [13], а в лоренцевом — в [14].

Теорема 5. *Пусть (M, g) — трехмерное локально однородное (псевдо)риманово многообразие. Тогда либо (M, g) является локально симметричным (относительно связности Леви-Чивита), либо оно локально изометрично трехмерной группе Ли с левоинвариантной (псевдо)римановой метрикой.*

Таким образом, с учетом результатов работы [15] для доказательства теоремы 3 достаточно рассмотреть случай метрических групп Ли.

В дальнейшем под *метрической группой Ли* $(G, \mathfrak{g}, V)$ будем понимать группу Ли G с метрической алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и метрической связностью с векторным кручением, которую порождает левоинвариантное векторное поле $V \in \mathfrak{g}$.

Докажем лемму, которую далее будем использовать для упрощения выкладок.

Лемма 1. *Если метрическая группа Ли $(G, \mathfrak{g}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то в некотором базисе $\{e_1, \ldots, e_n\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ необходимо выполняется*

$$V^i g_{ij} c^j_{kt} = 0, \tag{3}$$

либо в инвариантной форме

$$g(V, [X, Y]) = 0 \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Здесь c^j_{kt} — структурные константы алгебры $\mathfrak{g}$, определяемые разложением $[e_k, e_t] = c^j_{kt} e_j$.

Доказательство. Если $(G, \mathfrak{g}, V)$ — многообразие Эйнштейна, то в силу (2) тензор Риччи должен быть симметричен. Тогда по теореме 2 необходимо

$d\pi = 0$, т. е. для произвольных векторных полей $X, Y \in \mathfrak{g}$ выполняется

$$2d\pi(X,Y) = X\pi(Y) - Y\pi(X) - \pi([X,Y]) = -2\pi([X,Y]) = -2g([X,Y],V) = 0.$$

Фиксируя некоторый базис $\{e_1, \dots, e_n\}$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$, из данного равенства получаем условие (3). $\square$

Следующая классификация для трехмерных римановых групп Ли получена в [16].

Теорема 6. *Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной римановой метрикой. Тогда*

• *если G унимодулярная, то в алгебре Ли $\mathscr{U}$ группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид*

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1.$$

• *если G неунимодулярная, то в алгебре Ли $\mathscr{N}\mathscr{U}$ группы G существует ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G имеет вид*

$$[e_1, e_2] = (2 - \alpha_2)e_2 + \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = \alpha_1 e_2 + \alpha_2 e_3, \quad [e_2, e_3] = 0.$$

Классификация для трехмерных лоренцевых групп Ли была получена в [14, 17, 18].

Теорема 7. *Пусть G — трехмерная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда*

• *если G унимодулярная, то в алгебре Ли группы G существует псевдо-ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:*

1) *случай $\mathscr{A}_1$:*

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1$$

с времениподобным e_1;

2) *случай $\mathscr{A}_2$:*

$$[e_1, e_2] = (1 - \alpha_2)e_3 - e_2, \quad [e_1, e_3] = e_3 - (1 + \alpha_2)e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1$$

с времениподобным e_3;

3) *случай $\mathscr{A}_3$:*

$$[e_1, e_2] = e_1 - \alpha_1 e_3, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_1 e_2 - e_1, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + e_2 + e_3$$

с времениподобным e_3;

4) *случай $\mathscr{A}_4$:*

$$[e_1, e_2] = \alpha_3 e_2, \quad [e_1, e_3] = -\alpha_2 e_1 - \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = -\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

с времениподобным e_1 и $\alpha_2 \neq 0$.

• *если G неунимодулярная, то в алгебре Ли группы G существует псевдоортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3\}$ такой, что метрическая алгебра Ли группы G содержится в следующем списке:*

1) *случай $\mathscr{A}$:*

$$[e_1, e_2] = 0,\ [e_1, e_3] = \alpha_1 \sin\alpha_3\, e_1 - \alpha_2 \cos\alpha_3\, e_2,\ [e_2, e_3] = \alpha_1 \cos\alpha_3\, e_1 + \alpha_2 \sin\alpha_3\, e_2,$$

с времениподобным e_3 и $\sin\alpha_3 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 \geqslant 0$, $\alpha_2 \geqslant 0$;

2) *случай $\mathscr{B}$:*

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 - \alpha_4 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

с ненулевыми $\langle e_2, e_2\rangle = -\langle e_1, e_3\rangle = 1$ и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

3) *случай $\mathscr{C}_1$:*

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_3 e_1 + \alpha_1 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

с времениподобным e_2 и $\alpha_2 \neq \alpha_3$;

4) *случай $\mathscr{C}_2$:*

$$[e_1, e_2] = 0, \quad [e_1, e_3] = \alpha_2 e_1 - \alpha_3 e_2, \quad [e_2, e_3] = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

с времениподобным e_2 и $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$.

Все вычисления будем проводить в соответствующей алгебре Ли. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\dim\mathfrak{g} = n$. Зафиксируем базис $\{e_1, \ldots, e_n\}$ алгебры $\mathfrak{g}$.

Компоненты связности Леви-Чивита ∇^g выражаются через структурные константы и компоненты метрического тензора:

$$(\Gamma^g)^k_{ij} = \frac{1}{2}\big(C^k_{ij} + g^{sk}C^l_{sj}g_{il} + g^{sk}C^l_{si}g_{jl}\big),$$

где $\nabla^g_{e_i} e_j = (\Gamma^g)^k_{ij} e_k$ и $\{g^{ij}\}$ — матрица, обратная к матрице $\{g_{ij}\}$.

Пусть $V \in \mathfrak{g}$, тогда компоненты метрической связности ∇ с векторным кручением (1) задаются равенствами

$$\Gamma^k_{ij} = (\Gamma^g)^k_{ij} + g_{ij}V^k - V^s g_{sj}\delta^k_i,$$

где $\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k$.

Компоненты тензора кривизны R и тензора Риччи r можно вычислить с помощью следующих формул:

$$R_{ijks} = \big(\Gamma^l_{ik}\Gamma^p_{jl} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^p_{il} + C^l_{ij}\Gamma^p_{lk}\big)g_{ps}, \quad r_{ik} = R_{ijks}g^{js}.$$

Доказательство теоремы 3 разобьем на два случая. Трехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой рассмотрим в следующем разделе, а трехмерные группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой — в разд 4. Для оптимизации вычислений будем использовать системы компьютерной математики.

3. Трехмерные группы Ли с левоинвариантной римановой метрикой и векторным кручением

В данном разделе для доказательства теоремы 3 последовательно рассмотрим все трехмерные метрические алгебры Ли из теоремы 6 и покажем, что уравнение Эйнштейна (2) на них имеет решение, только если $\Lambda = 0$ или $V = 0$.

3.1. Случай $\mathscr{U}$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^1\alpha_1 = 0, \quad V^2\alpha_2 = 0, \quad V^3\alpha_3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathscr{U}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

1) либо $V = (0,0,0)$;
2) либо $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;
3) либо $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$;
4) либо $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$;
5) либо $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$;
6) либо $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$;
6) либо $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$;
7) либо $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

В силу переобозначения базисных векторов интерес представляют только случаи 1, 2, 5 и 8.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\frac{1}{2}V^1\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3 V^1 = 0, \quad -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^1)^2 = 0,$$
$$-\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \alpha_3\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 = 0, \quad -\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_2^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^1)^2 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$V^2V^1 = 0, \quad -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^1)^2 = 0,$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_3 V^1 = 0, \quad -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^2)^2 = 0,$$
$$\frac{1}{2}V^2\alpha_3 = 0, \quad -\Lambda - (V^2)^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - (V^1)^2 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$V^2V^1 = 0, \quad -(V^1)^2 - (V^2)^2 - \Lambda = 0,$$
$$V^3V^1 = 0, \quad -(V^1)^2 - (V^3)^2 - \Lambda = 0,$$
$$V^3V^2 = 0, \quad -(V^2)^2 - (V^3)^2 - \Lambda = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

3.2. Случай $\mathscr{N}\mathscr{U}$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^2(-2+\alpha_2)-V^3\alpha_3=0, \quad -\alpha_1 V^2-\alpha_2 V^3=0.$$

Если метрическая группа Ли $(G,\mathscr{N}\mathscr{U},V)$ является многообразием Эйнштейна, то

1) либо $V=(V^1,0,0)$;

2) либо $V=(V^1,0,V^3)$ и $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$;

3) либо $V=(V^1,V^2,V^3)$ и

$$\alpha_1=-(\alpha_3 V^3+2V^2)V^3/(V^2)^2, \quad \alpha_2=(\alpha_3 V^3+2V^2)/V^2.$$

Пусть $V=(V^1,0,0)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$-\frac{1}{2}\alpha_1 V^1-2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2-\frac{1}{2}\alpha_3 V^1-\alpha_3\alpha_2=0,$$
$$-\Lambda-\frac{1}{2}\alpha_1^2+\frac{1}{2}\alpha_3^2-\alpha_2 V^1-(V^1)^2-2\alpha_2-2V^1=0,$$
$$-\Lambda-4-\frac{1}{2}\alpha_3^2-\frac{1}{2}\alpha_1^2-2\alpha_2^2+4\alpha_2-2V^1-\alpha_3\alpha_1=0,$$
$$-\Lambda-4-\frac{1}{2}\alpha_3^2+\frac{1}{2}\alpha_1^2+\alpha_2 V^1+2\alpha_2-4V^1-(V^1)^2=0.$$

Данная система имеет решения

$$\Lambda=0, \quad \alpha_1=\alpha_3, \quad \alpha_2=1+\sqrt{1-\alpha_3^2}, \quad V^1=-2;$$
$$\Lambda=0, \quad \alpha_1=\alpha_3, \quad \alpha_2=1-\sqrt{1-\alpha_3^2}, \quad V^1=-2;$$
$$\Lambda=0, \quad \alpha_1=-\alpha_3, \alpha_2=1, \quad V^1=-1;$$
$$\Lambda=-2, \quad \alpha_1=-\alpha_3, \quad \alpha_2=1, \quad V^1=0.$$

Таким образом, либо $\Lambda=0$, либо $V=0$.

Пусть $V=(V^1,0,V^3)$ и $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$V^3V^1=0, \quad -\Lambda-\frac{1}{2}\alpha_1^2-(V^1)^2-2V^1=0,$$
$$\frac{1}{2}V^3\alpha_1=0, \quad -\Lambda-(V^3)^2-4-\frac{1}{2}\alpha_1^2-2V^1=0,$$
$$-\frac{1}{2}\alpha_1 V^1-2\alpha_1=0, \quad -\Lambda-(V^3)^2-4+\frac{1}{2}\alpha_1^2-4V^1-(V^1)^2=0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda=0$.

Пусть $V=(V^1,V^2,V^3)$ и

$$\alpha_1=-(\alpha_3 V^3+2V^2)V^3/(V^2)^2, \quad \alpha_2=(\alpha_3 V^3+2V^2)/V^2.$$

Тогда система уравнений (2) примет вид

$$V^2V^1-\frac{(V^3)^2(\alpha_3 V^3+2V^2)}{2(V^2)^2}-\frac{1}{2}V^3\alpha_3=0,$$

$$V^3V^1 + \frac{(\alpha_3V^3 + 2V^2)V^3}{2V^2} + \frac{1}{2}V^2\alpha_3 = 0,$$

$$V^3V^2 + \frac{(\alpha_3V^3 + 2V^2)V^3V^1}{2(V^2)^2} + \frac{2(\alpha_3V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2} - \frac{(\alpha_3V^3 + 2V^2)^2V^3}{(V^2)^3} - \frac{1}{2}\alpha_3V^1 - \frac{\alpha_3(\alpha_3V^3 + 2V^2)}{V^2} = 0,$$

$$-\Lambda - (V^2)^2 - \frac{(\alpha_3V^3 + 2V^2)^2(V^3)^2}{2(V^2)^4} + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{(\alpha_3V^3 + 2V^2)V^1}{V^2} - (V^1)^2 - \frac{2(\alpha_3V^3 + 2V^2)}{V^2} - 2V^1 = 0,$$

$$-\Lambda - (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 + \frac{(\alpha_3V^3 + 2V^2)^2(V^3)^2}{2(V^2)^4} + \frac{(\alpha_3V^3 + 2V^2)V^1}{V^2} + \frac{2(\alpha_3V^3 + 2V^2)}{V^2} - 4V^1 - 4 - (V^1)^2 = 0,$$

$$-\Lambda - (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{(\alpha_3V^3 + 2V^2)^2(V^3)^2}{2(V^2)^4} - \frac{2(\alpha_3V^3 + 2V^2)^2}{(V^2)^2} + \frac{4(\alpha_3V^3 + 2V^2)}{V^2} - 2V^1 - 4 + \frac{\alpha_3(\alpha_3V^3 + 2V^2)V^3}{(V^2)^2} - (V^2)^2 = 0.$$

Заметим, что сумма первого уравнения системы, домноженного на V^2, и второго уравнения системы, домноженного на V^3, дает $V^1((V^2)^2 + (V^3)^2) = 0$. Это влечет $V^1 = 0$ и упрощает данную систему уравнений до вида

$$\alpha_3 = -\frac{2V^2V^3}{(V^2)^2 + (V^3)^2}, \quad ((V^2)^2 + (V^3)^2 + 4)V^2V^3 = 0, \quad -2\Lambda = (V^2)^2 + (V^3)^2 + 4,$$
$$((V^2)^2 + (V^3)^2 + 4)((V^2)^2 - (V^3)^2) = 0, \quad (V^2)^2 + (V^3)^2 + 4 = 0.$$

Очевидно, что данная система решений не имеет.

4. Трехмерные группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и векторным кручением

В данном разделе для доказательства теоремы 3 последовательно рассмотрим все трехмерные метрические алгебры Ли из теоремы 7 и покажем, что уравнение Эйнштейна (2) на них имеет решение, только если $\Lambda = 0$ или $V = 0$.

4.1. Случай $\mathscr{A}_1$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^1\alpha_1 = 0, \quad V^2\alpha_2 = 0, \quad V^3\alpha_3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathscr{A}_1, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

1) либо $V = (0, 0, 0)$;
2) либо $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$;

3) либо $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$;
4) либо $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$;
5) либо $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$;
6) либо $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$;
7) либо $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$;
8) либо $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$V^1\alpha_2 - \alpha_3 V^1 = 0, \quad -\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 = 0,$$
$$-\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_2^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 = 0, \quad \Lambda - \frac{1}{2}\alpha_2^2 + \alpha_3\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (0, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\alpha_1 V^2 + V^2\alpha_3 = 0, \quad -\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 - (V^2)^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 = 0,$$
$$-\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_3\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 = 0, \quad \Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^2)^2 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$ и $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$-\alpha_1 V^3 - V^3\alpha_2 = 0, \quad -\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 - (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 = 0,$$
$$-\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_2^2 = 0, \quad \Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_2^2 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$-\frac{1}{2}\alpha_3 V^1 = 0, \quad \frac{1}{2}V^2\alpha_3 = 0, \quad -V^2V^1 = 0, \quad -\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 = 0,$$
$$\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^2)^2 = 0, \quad -\Lambda - (V^2)^2 - \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$V^3V^2 = 0, \quad \frac{1}{2}\alpha_1 V^2 = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_1 V^3 = 0, \quad -\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 - (V^2)^2 = 0,$$
$$-\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 - (V^3)^2 = 0, \quad \Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + (V^3)^2 + (V^2)^2 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V=(V^1,0,V^3)$ и $\alpha_1=0$, $\alpha_3=0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\frac{1}{2}V^1\alpha_2=0,\quad -\frac{1}{2}V^3\alpha_2=0,\quad -V^3V^1=0,\quad -\Lambda+\frac{1}{2}\alpha_2^2+(V^1)^2=0,$$
$$\Lambda+(V^3)^2-\frac{1}{2}\alpha_2^2=0,\quad -\Lambda-(V^3)^2-\frac{1}{2}\alpha_2^2+(V^1)^2=0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda=0$.

Пусть $V=(V^1,V^2,V^3)$ и $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$V^3V^2=0,\quad -V^2V^1=0,\quad -V^3V^1=0,\quad (V^1)^2-(V^2)^2-\Lambda=0,$$
$$(V^1)^2-(V^3)^2-\Lambda=0,\quad (V^2)^2+(V^3)^2+\Lambda=0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda=0$.

4.2. Случай $\mathscr{A}_2$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^1\alpha_1=0,\quad V^2-V^3(\alpha_2-1)=0,\quad V^2(1+\alpha_2)+V^3=0.$$

Если метрическая группа Ли $(G,\mathscr{A}_2,V)$ является многообразием Эйнштейна, то

1) либо $V=(0,0,0)$,
2) либо $V=(V^1,0,0)$ и $\alpha_1=0$,
3) $V=(0,V^2,-V^2)$ и $\alpha_2=0$,
4) либо $V=(V^1,V^2,-V^2)$ и $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V=(V^1,0,0)$ и $\alpha_1=0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$-\Lambda=0,\quad -2\alpha_2+V^1=0,$$
$$-(V^1)^2-\Lambda-2\alpha_2+V^1=0,\quad (V^1)^2+\Lambda-2\alpha_2+V^1=0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda=0$.

Пусть $V=(0,V^2,-V^2)$ и $\alpha_2=0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$-\frac{1}{2}V^2\alpha_1=0,\quad -\frac{1}{2}\alpha_1^2-\Lambda=0,$$
$$-\Lambda+(V^2)^2+\frac{1}{2}\alpha_1^2+\alpha_1=0,\quad \Lambda+(V^2)^2-\frac{1}{2}\alpha_1^2+\alpha_1=0,$$
$$(V^2)^2+\alpha_1=0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda=0$.

Пусть $V=(V^1,V^2,-V^2)$ и $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$V^2V^1=0,\quad -\Lambda=0,$$
$$(V^2)^2+V^1=0,\quad -(V^1)^2+(V^2)^2-\Lambda+V^1=0,$$
$$(V^1)^2+(V^2)^2+\Lambda+V^1=0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.3. Случай $\mathscr{A}_3$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_1 V^2 + V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^3 + V^1 = 0, \quad -\alpha_1 V^1 - V^2 + V^3 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathscr{A}_3, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

1) либо $V = (0,0,0)$;

2) либо $V = (0, V^2, V^2)$ и $\alpha_1 = 0$.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V = (0, V^2, V^2)$ и $\alpha_1 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$V^2 V^1 = 0, \quad -\Lambda = 0,$$
$$(V^2)^2 + V^1 = 0, \quad -(V^1)^2 + (V^2)^2 - \Lambda + V^1 = 0,$$
$$(V^1)^2 + (V^2)^2 + \Lambda + V^1 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.4. Случай $\mathscr{A}_4$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$V^3 \alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 V^2 - \alpha_2 V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^1 + \alpha_2 V^2 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathscr{A}_4, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

1) либо $V = (0,0,0)$,

2) либо $V = (0,0,V^3)$ и $\alpha_3 = 0$.

В первом случае вектор V тривиален.

Пусть $V = (0,0,V^3)$ и $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$2\alpha_2\alpha_1 = 0, \quad -2\alpha_2^2 - \Lambda = 0,$$
$$\alpha_2 V^3 - (V^3)^2 - \Lambda = 0, \quad \alpha_2 V^3 + (V^3)^2 + \Lambda = 0.$$

Данная система решений не имеет.

4.5. Случай $\mathscr{A}$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$\cos(\alpha_3) V^1 \alpha_1 + \sin(\alpha_3)\alpha_2 V^2 = 0, \quad \cos(\alpha_3) V^2 \alpha_2 - \sin(\alpha_3)\alpha_1 V^1 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathscr{A}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

1) либо $V = (0,0,V^3)$;

2) либо $V = (0, V^2, V^3)$ и $\alpha_2 = 0$;

3) либо $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$.

Пусть $V = (0,0,V^3)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\alpha_1^2 \cos(\alpha_3)\sin(\alpha_3) - \alpha_2^2\cos(\alpha_3)\sin(\alpha_3) + \frac{1}{2}\cos(\alpha_3)\alpha_1 V^3 - \frac{1}{2}\cos(\alpha_3)\alpha_2 V^3 = 0,$$

$$\Lambda + \frac{1}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_1^2 + \alpha_2\cos(\alpha_3)^2\alpha_1 + \frac{1}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_2^2 - \sin(\alpha_3)\alpha_1 V^3 - \alpha_1^2 - \sin(\alpha_3)\alpha_2 V^3 - \alpha_2^2 = 0,$$

$$-\Lambda-\frac{3}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_1^2-\alpha_2\cos(\alpha_3)^2\alpha_1+\frac{1}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_2^2+2\sin(\alpha_3)\alpha_1V^3+\sin(\alpha_3)\alpha_2V^3 \\ +(V^3)^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1^2=0,$$

$$-\Lambda+\frac{1}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_1^2-\alpha_2\cos(\alpha_3)^2\alpha_1-\frac{3}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_2^2+\sin(\alpha_3)\alpha_1V^3+2\sin(\alpha_3)\alpha_2V^3 \\ +(V^3)^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2=0.$$

Данная система имеет решения

$$\Lambda=2\sin(\alpha_3)^2\alpha_1^2,\quad \alpha_2=\alpha_1,\quad V^3=0;$$
$$\Lambda=0,\ \alpha_2=\alpha_1,\quad V^3=-\alpha_1\sin(\alpha_3);$$
$$\Lambda=0,\quad \alpha_1=0,\quad \alpha_2=\pm V^3,\quad \alpha_3=\mp\frac{\pi}{2};$$
$$\Lambda=0,\quad \alpha_1=\pm V^3,\quad \alpha_2=0,\quad \alpha_3=\mp\frac{\pi}{2};$$
$$\Lambda=0,\quad \alpha_1=\pm V^3,\quad \alpha_2=\pm V^3,\quad \alpha_3=\mp\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, либо $\Lambda=0$, либо $V=0$.

Пусть $V=(0,V^2,V^3)$ и $\alpha_2=0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$-V^2V^3=0,\quad -\frac{1}{2}\alpha_1\cos(\alpha_3)V^2=0,$$
$$\alpha_1^2\cos(\alpha_3)\sin(\alpha_3)+\frac{1}{2}\cos(\alpha_3)\alpha_1V^3=0,$$
$$-\Lambda+\frac{1}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_1^2+\sin(\alpha_3)\alpha_1V^3+(V^3)^2=0,$$
$$\Lambda+\frac{1}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_1^2-\sin(\alpha_3)\alpha_1V^3+(V^2)^2-\alpha_1^2=0,$$
$$-\Lambda-\frac{3}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_1^2+2\sin(\alpha_3)\alpha_1V^3+(V^3)^2-(V^2)^2+\alpha_1^2=0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda=0$.

Пусть $V=(V^1,0,V^3)$ и $\alpha_1=0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$-V^1V^3=0,\quad \frac{1}{2}\cos(\alpha_3)V^1\alpha_2=0,$$
$$-\alpha_2^2\cos(\alpha_3)\sin(\alpha_3)-\frac{1}{2}\cos(\alpha_3)\alpha_2V^3=0,$$
$$-\Lambda+\frac{1}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_2^2+\sin(\alpha_3)\alpha_2V^3+(V^3)^2=0,$$
$$\Lambda+\frac{1}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_2^2-\sin(\alpha_3)\alpha_2V^3+(V^1)^2-\alpha_2^2=0,$$
$$-\Lambda-\frac{3}{2}\cos(\alpha_3)^2\alpha_2^2+2\sin(\alpha_3)\alpha_2V^3+(V^3)^2-(V^1)^2+\alpha_2^2=0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda=0$.

4.6. Случай $\mathscr{B}$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_1V^3-\alpha_2V^2=0,\quad \alpha_4V^2-\alpha_3V^3=0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathscr{B}, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

1) либо $V = (V^1, 0, 0)$,
2) либо $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_2 V^2/V^3$, $\alpha_3 = -\alpha_4 V^2/V^3$,
3) либо $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, 0)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$-\frac{1}{2}\alpha_4^2 - \Lambda = 0, \quad -\frac{1}{2}\alpha_4^2 + \Lambda = 0,$$
$$\alpha_2\alpha_4 + \frac{1}{2}V^1\alpha_4 = 0, \quad \alpha_1\alpha_4 - \alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_3 V^1 + (V^1)^2 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_2 V^2/V^3$, $\alpha_3 = -\alpha_4 V^2/V^3$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$(V^3)^2 = 0, \quad -\frac{1}{2}(\alpha_4 + 2V^2)V^3 = 0,$$
$$\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2 V^2 + \frac{1}{2}V^1\alpha_4 - V^1V^2 = 0,$$
$$\frac{\alpha_2(V^2)^2}{V^3} - \alpha_2^2 - \frac{\alpha_4 V^2 V^1}{V^3} + (V^1)^2 = 0,$$
$$-\Lambda + 2\alpha_2 V^3 - \alpha_4 V^2 + 2V^3V^1 - \frac{1}{2}\alpha_4^2 = 0,$$
$$\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_4^2 + (V^2)^2 + \frac{3}{2}\alpha_4 V^2 - \alpha_2 V^3 - V^3V^1 = 0.$$

Поскольку предполагается, что в рассматриваемом случае $V^3 \neq 0$, из первого уравнения системы заключаем, что данная система решений не имеет.

Пусть $V = (V^1, V^2, 0)$ и $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$-\Lambda = 0, \quad -V^1V^2 = 0,$$
$$(V^2)^2 + \Lambda = 0, \quad \alpha_1 V^2 + \alpha_3 V^1 + (V^1)^2 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.7. Случай $\mathscr{C}_1$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_2 V^2 - \alpha_1 V^1 = 0, \quad \alpha_1 V^2 + \alpha_3 V^1 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathscr{C}_1, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

1) либо $V = (0, 0, V^3)$,
2) либо $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_3 V^1/V^2$, $\alpha_2 = \alpha_3 (V^1)^2/(V^2)^2$,
3) либо $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$. Тогда система уравнений (3) примет вид

$$\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 = 0,$$
$$-\alpha_2\alpha_3 + \alpha_2 V^3 - \alpha_3^2 + 2\alpha_3 V^3 - (V^3)^2 - \Lambda = 0,$$
$$-\alpha_2^2 + \alpha_2 V^3 - \alpha_3^2 + \alpha_3 V^3 - \Lambda = 0,$$
$$\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_2 V^3 - \alpha_3 V^3 + (V^3)^2 + \Lambda = 0.$$

Данная система имеет решения

$$\Lambda = -2\alpha_3^2, \quad \alpha_2 = \alpha_3, \quad V^3 = 0;$$
$$\Lambda = 0, \quad \alpha_2 = V^3, \quad \alpha_3 = V^3;$$
$$\Lambda = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = V^3, \quad \alpha_3 = 0;$$
$$\Lambda = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = V^3;$$
$$\Lambda = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad V^3 = 0.$$

Таким образом, либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = \alpha_3 V^1/V^2$, $\alpha_2 = \alpha_3 (V^1)^2/(V^2)^2$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$(\frac{\alpha_3 (V^1)^2}{(V^2)^2} - V^3)V^2 = 0, \quad -V^1(\alpha_3 - V^3) = 0, \quad \frac{\alpha_3 (V^1)^2}{V^2} - V^2 V^3 = 0,$$
$$\frac{\alpha_3^2 (V^1)^3}{(V^2)^3} - \frac{\alpha_3^2 V^1}{V^2} - V^2 V^1 = 0,$$
$$-\Lambda - \frac{\alpha_3^2 (V^1)^2}{(V^2)^2} + \frac{\alpha_3 (V^1)^2 V^3}{(V^2)^2} - \alpha_3^2 + 2\alpha_3 V^3 + (V^2)^2 - (V^3)^2 = 0,$$
$$-\Lambda - \frac{\alpha_3^2 (V^1)^4}{(V^2)^4} + \frac{\alpha_3 (V^1)^2 V^3}{(V^2)^2} - \alpha_3^2 + \alpha_3 V^3 - (V^1)^2 + (V^2)^2 = 0,$$
$$\Lambda + \frac{\alpha_3^2 (V^1)^4}{(V^2)^4} + \frac{\alpha_3^2 (V^1)^2}{(V^2)^2} - \frac{2\alpha_3 (V^1)^2 V^3}{(V^2)^2} - \alpha_3 V^3 + (V^1)^2 + (V^3)^2 = 0,$$
$$-\alpha_3 V^1 + V^1 V^3 = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

Пусть $V = (V^1, 0, V^3)$ и $\alpha_1 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$V^1 V^3 = 0, \quad \alpha_2 V^3 - (V^3)^2 - \Lambda = 0, \quad -\alpha_2^2 + \alpha_2 V^3 - (V^1)^2 - \Lambda = 0,$$
$$\alpha_2^2 - 2\alpha_2 V^3 + (V^1)^2 + (V^3)^2 + \Lambda = 0.$$

Данная система имеет решение только при $\Lambda = 0$.

4.8. Случай $\mathscr{C}_2$. В данном случае условие (3) имеет вид

$$\alpha_2 V^2 - \alpha_1 V^1 = 0, \quad \alpha_2 V^1 + \alpha_3 V^2 = 0.$$

Если метрическая группа Ли $(G, \mathscr{C}_2, V)$ является многообразием Эйнштейна, то

1) либо $V = (0, 0, V^3)$,

2) либо $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = -\alpha_3 (V^2)^2/(V^1)^2$, $\alpha_2 = -\alpha_3 V^2/V^1$.

Пусть $V = (0, 0, V^3)$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{gathered}
-\alpha_2\alpha_1 - \alpha_2\alpha_3 + \frac{1}{2}V^3\alpha_1 + \frac{1}{2}V^3\alpha_3 = 0,\\
-\Lambda - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - 2\alpha_2^2 + 3\alpha_2 V^3 - (V^3)^2 = 0,\\
-\Lambda + \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - 2\alpha_2^2 + 2\alpha_2 V^3 + \alpha_1\alpha_3 = 0,\\
\Lambda + 2\alpha_2^2 - 3\alpha_2 V^3 + (V^3)^2 - \frac{1}{2}\alpha_1^2 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 = 0.
\end{gathered}$$

Данная система имеет решения

$$\begin{gathered}
\Lambda = 0, \quad \alpha_2 = V^3, \quad \alpha_3 = -\alpha_1;\\
\Lambda = -2\alpha_2^2, \quad \alpha_3 = -\alpha_1, \quad V^3 = 0.
\end{gathered}$$

Таким образом, либо $\Lambda = 0$, либо $V = 0$.

Пусть $V = (V^1, V^2, V^3)$ и $\alpha_1 = -\alpha_3(V^2)^2/(V^1)^2$, $\alpha_2 = -\alpha_3 V^2/V^1$. Тогда система уравнений (2) примет вид

$$\begin{gathered}
-V^2V^3 - \frac{\alpha_3(V^2)^2}{2V^1} - \frac{1}{2}V^1\alpha_3 = 0, \quad \frac{\alpha_3(V^2)^3}{2(V^1)^2} + \frac{1}{2}V^2\alpha_3 + V^1V^3 = 0,\\
-V^2V^1 - \frac{\alpha_3^2(V^2)^3}{(V^1)^3} + \frac{\alpha_3^2V^2}{V^1} - \frac{V^3\alpha_3(V^2)^2}{2(V^1)^2} + \frac{1}{2}V^3\alpha_3 = 0,\\
-\Lambda + (V^2)^2 + \frac{\alpha_3^2(V^2)^4}{2(V^1)^4} + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{3\alpha_3^2(V^2)^2}{(V^1)^2} - \frac{2\alpha_3V^2V^3}{V^1} - (V^1)^2 = 0,\\
-\Lambda - \alpha_3^2(V^2)^4 2(V^1)^4 + \frac{1}{2}\alpha_3^2 - \frac{2\alpha_3^2(V^2)^2}{(V^1)^2} - \frac{3\alpha_3V^2V^3}{V^1} - (V^3)^2 + (V^2)^2 = 0,\\
\Lambda + \frac{2\alpha_3^2(V^2)^2}{(V^1)^2} + \frac{3\alpha_3V^2V^3}{V^1} + (V^3)^2 - \frac{\alpha_3^2(V^2)^4}{2(V^1)^4} + \frac{1}{2}\alpha_3^2 + (V^1)^2 = 0.
\end{gathered}$$

Заметим, что из первого и второго уравнений системы соответственно получаем

$$\alpha_3 = -\frac{2V^1V^2V^3}{(V^1)^2 + (V^2)^2}, \quad \alpha_3 = -\frac{2V^1V^3}{V^2((V^1)^2 + (V^2)^2)},$$

что влечет $(V^2)^2 = 1$. Сумма пятого и шестого уравнений системы с последующей подстановкой $(V^2)^2 = 1$ и $\alpha_3^2 = \frac{4(V^1)^2(V^3)^2}{((V^1)^2+1)^2}$ дает

$$(V^1)^2((1 + (V^1)^2)^3 + 4(V^1)^2(V^3)^2) = 2(V^3)^2(4(V^1)^8 + 1), \tag{4}$$

а из третьего уравнения системы для $V^2 = 1$ заключаем

$$2(V^1)^2(V^3)^2 + (1 + (V^1)^2)^2(1 + (V^3)^2) + 2V^3(1 + (V^1)^2) = 4(V^3)^2. \tag{5}$$

Поскольку система равенств (4), (5) неразрешима в действительных числах (как показывает анализ в системах символьных вычислений), исходная система уравнений решений не имеет. Аналогичные рассуждения для $V^2 = -1$ также приводят к выводу об отсутствии решения системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cartan E.* Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, II // Ann. Ecole Norm. Sup. 1925. V. 42. P. 17–88.
2. *Muniraja G.* Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Schur's theorem // Int. J. Contemp. Math. Sci. 2008. V. 3, N 25. P. 1223–1232.
3. *Agricola I., Thier C.* The geodesics of metric connections with vectorial torsion // Ann. Global Anal. Geom. 2004. V. 26. P. 321–332.
4. *Murathan C., Özgür C.* Riemannian manifolds with a semi-symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions // Proc. Eston. Acad. Sci. 2008. V. 57, N 4. P. 210–216.
5. *Yilmaz H. B., Zengin F. Ö., Uysal. S. A.* On a semi symmetric metric connection with a special condition on a Riemannian manifold // Eur. J. Pure Appl. Math. 2011. V. 4, N 2. P. 152–161.
6. *Zengin F. Ö., Demirbağ S. A., Uysal. S. A., Yilmaz H. B.* Some vector fields on a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection // Bull. Iran. Math. Soc. 2012. V. 38, N 2. P. 479–490.
7. *Agricola I., Kraus M.* Manifolds with vectorial torsion // Differ. Geom. Appl. 2016. V. 46. P. 130–147.
8. *Yano K.* On semi-symmetric metric connection // Rev. Roum. Math. Pures Appl. 1970. V. 15. P. 1579–1586.
9. *Barua B., Ray A. Kr.* Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold // Indian J. Pure Appl. Math. 1985. V. 16, N 7. P. 736–740.
10. *De U. C., De B. K.* Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold // Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der. 1995. V. 54. P. 111–117.
11. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна. М.: Мир, 1990.
12. *Chaturvedi B. B., Gupta B. K.* Study on semi-symmetric metric spaces // Novi Sad J. Math. 2014. V. 44, N 2. P. 183–194.
13. *Sekigawa K.* On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces // Tensor N. S. 1977. V. 31. P. 87–97.
14. *Calvaruso G.* Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds // J. Geom. Phys. 2007. V. 57. P. 1279–1291.
15. *Клепиков П. Н., Родионов Е. Д., Хромова О. П.* Уравнение Эйнштейна на трехмерных локально симметрических (псевдо)римановых многообразиях с векторным кручением // Мат. заметки СВФУ. 2019. Т. 26, № 6. С. 25–36.
16. *Milnor J.* Curvature of left invariant metric on Lie groups // Adv. Math. 1976. V. 21. P. 293–329.
17. *Rodionov E. D., Slavskii V. V., Chibrikova L. N.* Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces // Sib. Adv. Math. 2007. V. 17, N 3. P. 186–212.
18. *Cordero L. A., Parker P. E.* Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups // Rend. Mat. 1997. V. 17. P. 129–155.

Поступила в редакцию 27 октября 2020 г.
После доработки 29 октября 2021 г.
Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Клепиков Павел Николаевич, Родионов Евгений Дмитриевич,
Хромова Олеся Павловна
Алтайский государственный университет,
кафедра математического анализа,
пр. Ленина, 61, Барнаул 656049
klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

UDC 514.765

EINSTEIN EQUATION ON THREE–DIMENSIONAL LOCALLY HOMOGENEOUS (PSEUDO)RIEMANNIAN MANIFOLDS WITH VECTORIAL TORSION

P. N. Klepikov, E. D. Rodionov, and O. P. Khromova

Abstract: A metric connection with vectorial torsion, or a semi-symmetric metric connection, was discovered by E. Cartan. Later, many mathematicians studied the properties of this connection. For example, K. Yano, I. Agricola and other mathematicians investigated the properties of the curvature tensor, geodesic lines, and also the behavior of the connection under conformal deformations of the original metric.

In this paper, we study the Einstein equation on three-dimensional locally homogeneous (pseudo)Riemannian manifolds with metric connection with invariant vectorial torsion. A theorem is obtained stating that all such manifolds are either Einstein manifolds with respect to the Levi-Civita connection or conformally flat. Earlier, the Einstein equation in the case of three-dimensional locally symmetric (pseudo)Riemannian manifolds have been investigated by the authors.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.26.84.003

Keywords: Einstein manifold, invariant (pseudo)Riemannian metric, Lie algebra, locally homogeneous space, vectorial torsion.

REFERENCES

1. *Cartan E.*, "Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, II," Ann. Ecole Norm. Sup., **42**, 17–88 (1925).
2. *Muniraja G.*, "Manifolds admitting a semi-symmetric metric connection and a generalization of Schur's theorem," Int. J. Contemp. Math. Sci., **3**, No. 25, 1223–1232 (2008).
3. *Agricola I. and Thier C.*, "The geodesics of metric connections with vectorial torsion," Ann. Global Anal. Geom., **26**, 321–332 (2004).
4. *Murathan C. and Özgür C.*, "Riemannian manifolds with a semi- symmetric metric connection satisfying some semisymmetry conditions," Proc. Eston. Acad. Sci., **57**, No. 4, 210–216 (2008).
5. *Yilmaz H. B., Zengin F. Ö., and Uysal. S. A.*, "On a semi-symmetric metric connection with a special condition on a Riemannian manifold," Eur. J. Pure Appl. Math., **4**, No. 2, 152–161 (2011).
6. *Zengin F. Ö., Demirbağ S. A., Uysal. S. A., and Yilmaz H. B.*, "Some vector fields on a Riemannian manifold with semi-symmetric metric connection," Bull. Iran. Math. Soc., **38**, No. 2, 479–490 (2012).
7. *Agricola I. and Kraus M.*, "Manifolds with vectorial torsion," Differ. Geom. Appl., **46**, 130–147 (2016).
8. *Yano K.*, "On semi-symmetric metric connection," Rev. Roum. Math. Pures Appl., **15**, 1579–1586 (1970).
9. *Barua B. and Ray A. Kr.*, "Some properties of a semi-symmetric metric connection in a Riemannian manifold," Indian J. Pure Appl. Math., **16**, No. 7, 736–740 (1985).

10. *De U. C. and De B. K.*, "Some properties of a semi-symmetric metric connection on a Riemannian manifold," Istanbul Univ. Fen. Fak. Mat. Der., **54**, 111–117 (1995).
11. *Besse A.*, Einstein Manifolds, Springer-Verl., Berlin; Heidelberg (1987).
12. *Chaturvedi B. B. and Gupta B. K.*, "Study on semi-symmetric metric spaces," Novi Sad J. Math., **44**, No. 2, 183–194 (2014).
13. *Sekigawa K.*, "On some 3-dimensional curvature homogeneous spaces," Tensor N. S., **31**, 87–97 (1977).
14. *Calvaruso G.*, "Homogeneous structures on three-dimensional Lorentzian manifolds," J. Geom. Phys., **57**, 1279–1291 (2007).
15. *Klepikov P. N., Rodionov E. D., and Khromova O. P.*, "Einstein equation on three-dimensional locally symmetric (pseudo)Riemannian manifolds with vectorial torsion," Mat. Zamet. SVFU, **26**, No 6. 25–36 (2019).
16. *Milnor J.*, "Curvature of left invariant metric on Lie groups," Adv. Math., **21**, 293–329 (1976).
17. *Rodionov E. D., Slavskii V. V., and Chibrikova L. N.*, "Locally conformally homogeneous pseudo-Riemannian spaces," Sib. Adv. Math., **17**, No. 3, 186–212 (2007).
18. *Cordero L. A. and Parker P. E.*, "Left-invariant Lorentzian metrics on 3-dimensional Lie groups," Rend. Mat., **17**, 129–155 (1997).

Submitted October 27, 2020
Revised October 29, 2021
Accepted November 26, 2021

Pavel N. Klepikov, Evgenii D. Rodionov, and Olesya P. Khromova
Altai State University,
Department of Mathematical Analysis,
61 Lenin Street, Barnaul 656049, Russia
klepikov.math@gmail.com, edr2002@mail.ru, khromova.olesya@gmail.com