Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2021. Том 28, № 2

УДК 517.9

РАСПРЕДЕЛЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ГЕРАСИМОВА — КАПУТО

М. В. Плеханова,
Г. Д. Байбулатова, Б. Т. Киен

Аннотация. Рассматривается задача оптимального управления для полулинейных эволюционных уравнений с младшими дробными производными, как разрешенных относительно старшей дробной производной, так и с вырожденным линейным оператором при ней. Нелинейный оператор зависит от дробных производных Герасимова – Капуто младшего порядка. Для вырожденного уравнения нелинейный оператор рассматривается в двух случаях: если его образ лежит в подпространстве без вырождения, а также если этот оператор зависит только от элементов подпространства без вырождения. Показано, что в случае, когда разрешимость начальной задачи хотя бы при одном допустимом управлении очевидна либо может быть показана напрямую, можно доказать существование оптимального управления при более слабом условии равномерной по времени локальной липшицевости по фазовым переменным нелинейного оператора вместо условия его липшицевости. Абстрактные результаты проиллюстрированы на задаче оптимального управления для одной системы уравнений в частных производных с дробными производными по времени.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.16.62.004

Ключевые слова: дифференциальное уравнение дробного порядка, дробная производная Герасимова — Капуто, вырожденное эволюционное уравнение, начально-краевая задача, задача оптимального управления, распределенное управление.

§ 1. Введение

В работе исследуются вопросы существования решения для задач оптимального управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями дробного порядка, которые в последние десятилетия играют все более важную роль при построении математических моделей различных реальных процессов и явлений [1–3]. В качестве метода мы предлагаем исследование абстрактной задачи управления для уравнения в банаховом пространстве, результаты которого затем используются при рассмотрении задач оптимального управления для уравнений и систем уравнений в частных производных дробного порядка по времени.

Работа поддержана Приказом 211 Правительства Российской федерации, договор 02.A03.21.0011, и Российским фондом фундаментальных исследований, гранты 20–31–90015 и 21–51–54003.

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$LD_t^\alpha x(t) = Mx(t) + N\big(t, D_t^{\alpha_1}x(t), \dots, D_t^{\alpha_n}x(t)\big) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \tag{1}$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{2}$$

$$u \in \mathscr{U}_\partial, \tag{3}$$

$$J(x, u) \to \inf. \tag{4}$$

Здесь $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, $\mathscr{U}$ — банаховы пространства, L — линейный непрерывный оператор, действующий из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ ($L \in \mathscr{L}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$), M — линейный замкнутый плотно определенный в $\mathscr{X}$ и действующий в $\mathscr{Y}$ оператор ($M \in \mathscr{C}l(\mathscr{X};\mathscr{Y})$), линейный непрерывный оператор B действует из пространства управлений $\mathscr{U}$ в $\mathscr{Y}$, и, наконец, $N : (t_0, T) \times \mathscr{X}^n \to \mathscr{Y}$ — нелинейный, вообще говоря, оператор. Проектор P вдоль подпространства вырождения уравнения (1) определяется операторами L и M и будет задан далее. При этом D_t^α, $D_t^{\alpha_1}, D_t^{\alpha_2}, \dots, D_t^{\alpha_n}$ — дробные производные Герасимова — Капуто, $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$. Предполагается, что $\ker L \neq \varnothing$, поэтому уравнение (1) относится к классу уравнений, не разрешимых относительно старшей производной по времени, называемых также *вырожденными эволюционными уравнениями.* Начальные условия (2) называются *обобщенными условиями Шоуолтера — Сидорова.* В условии (3) $\mathscr{U}_\partial$ — множество допустимых управлений (непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $\mathscr{U}$), $J(x, u)$ — выпуклый, полунепрерывный, ограниченный снизу, коэрцитивный функционал качества.

Основная цель исследования в данной работе состоит в получении условий разрешимости задачи распределенного управления (1)–(4). При этом рассмотрены системы управления, задаваемые не только вырожденным эволюционным уравнением (1), но и уравнением (1), разрешенным относительно старшей производной, когда $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$, $L = I$. Во многочисленных работах, посвященных уравнениям дробного порядка, основное внимание уделяется исследованиям разрешенных (либо разрешимых в случае непрерывной обратимости оператора L) относительно старшей дробной производной уравнений [4–7], для этих же уравнений рассматриваются и задачи оптимального управления [8–10]. Данное исследование продолжает цикл работ, посвященных вырожденным эволюционным уравнениям дробного порядка. Ранее получены результаты о разрешимости вырожденных линейных уравнений различных классов в работах [11–15], для вырожденных нелинейных уравнений — в [16–19]. Существование сильного решения задачи (1), (2) при различных условиях на нелинейный оператор установлено в [20, 21]. Задачи оптимального управления рассмотрены для уравнений с производными целого порядка в нелинейной части в [20, 22], для уравнения (1) получены результаты о разрешимости задач стартового управления в [23, 24]. В данной работе, по-видимому, впервые рассматривается задача распределенного управления для вырожденного эволюционного уравнения с младшими дробными производными.

Доказательство разрешимости задачи управления сводится к доказательству разрешимости начальной задачи (1), (2) хотя бы при одном допустимом управлении $u \in \mathscr{U}_\partial$, проверке нужных свойств целевого функционала, а также так называемых условий компактности для нелинейного оператора (см. теоремы 3, 8, 9). При этом значительную часть полученных утверждений составляют условия, гарантирующие разрешимость начальной задачи, в том числе весьма обременительное условие липшицевости нелинейного оператора по фазовым переменным. Однако для некоторых конкретных задач разрешимость начальной задачи хотя бы при одном допустимом управлении очевидна либо легко доказывается непосредственно. В таком случае можно отказаться от условий разрешимости начальной задачи, а условие липшицевости нелинейного оператора заменить гораздо менее ограничительным условием равномерной по времени локальной липшицевости по фазовым переменным. Эти соображения использованы для получения дополнительных утверждений (теоремы 4 и 10) о существовании оптимального управления как для вырожденного уравнения, так и для невырожденного. Действенность таких утверждений продемонстрирована на конкретной задаче с распределенным управлением для системы уравнений в частных производных, не разрешимой относительно старшей дробной производной по времени.

Во втором параграфе данной работы приведены условия разрешимости задачи Коши для полулинейного уравнения, разрешенного относительно старшей дробной производной. В третьем параграфе доказаны теоремы о существовании оптимального управления в задачах для таких уравнений. Четвертый параграф содержит полученные ранее результаты о разрешимости обобщенной задачи Шоуолтера — Сидорова (2) для вырожденного полулинейного уравнения (1). В пятом параграфе доказаны теоремы о разрешимости задач с распределенным управлением для вырожденных полулинейных уравнений. Наконец, в шестом параграфе существование оптимального управления для одной системы уравнений доказано путем редукции задачи управления к задаче для вырожденного эволюционного уравнения в банаховом пространстве.

§ 2. Задача Коши для невырожденного уравнения

Обозначим для $\delta > 0$, $t > 0$

$$g_\delta(t) = \Gamma(\delta)^{-1} t^{\delta-1}, \quad \widetilde{g}_\delta(t) = \Gamma(\delta)^{-1}(t-t_0)^{\delta-1},$$

$$J_t^\delta h(t) := \int_{t_0}^{t} g_\delta(t-s)h(s)\,ds.$$

Пусть $m-1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, D_t^m — обычная производная порядка $m \in \mathbb{N}$, J_t^0 — тождественный оператор. Производная Герасимова — Капуто порядка α функции h определяется как (см., например, [4, с. 11])

$$D_t^\alpha h(t) := D_t^m J_t^{m-\alpha}\left(h(t) - \sum_{k=0}^{m-1} h^{(k)}(t_0)\widetilde{g}_{k+1}(t)\right), \quad t > t_0.$$

Пусть $\mathscr{Z}$ — банахово пространство, оператор $N : (t_0, T) \times \mathscr{Z}^n \to \mathscr{Z}$ нелинейный. Рассмотрим задачу Коши

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{5}$$

для нелинейного дифференциального уравнения

$$D_t^{\alpha} z(t) = Az(t) + N\big(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)\big) + f(t), \tag{6}$$

где $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, D_t^{α}, $D_t^{\alpha_1}, D_t^{\alpha_2}, \dots, D_t^{\alpha_n}$ — дробные производные Герасимова — Капуто, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-1$, $f : [t_0, T] \to \mathscr{Z}$, $T > 0$. Уравнение вида (6), разрешенное относительно старшей производной, будем также называть невырожденным, в отличие от вырожденного уравнения, не разрешимого относительно старшей производной, которое рассматривается во второй части данной работы.

Сильным решением задачи (5), (6) назовем функцию $z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathscr{Z})$, для которой

$$J_t^{m-\alpha}\left(z - \sum_{k=1}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\widetilde{g}_{k+1}\right) \in W_q^m(t_0, T; \mathscr{Z}),$$

удовлетворяющую условиям (5) и почти всюду на (t_0, T) — уравнению (6).

Лемма 1. *Пусть $l - 1 < \beta \leq l \in \mathbb{N}$, $T > t_0$. Тогда*

$$\exists C_{l,\beta} > 0 \ \forall h \in C^l([t_0, T]; \mathscr{Z}) \quad \big\|D_t^{\beta} h\big\|_{C([t_0,T];\mathscr{Z})} \leq C_{l,\beta} \|h\|_{C^l([t_0,T];\mathscr{Z})}.$$

Лемма 2. *Пусть $l - 1 < \beta \leq l \in \mathbb{N}$, $q > 1$, $q > (l-\beta)^{-1}$ при $\beta < l$, $T > t_0$. Тогда*

$$\exists C_{q,\beta} > 0 \ \forall h \in C^l([t_0, t]; \mathscr{Z}) \quad \big\|D_t^{\beta} h\big\|_{L_q(t_0,t;\mathscr{Z})} \leq C_{q,\beta} \|h\|_{W_q^l(t_0,t;\mathscr{Z})}.$$

Доказательство. При $\beta < l$ для $h \in C^l([t_0, t]; \mathscr{Z})$ имеем

$$\begin{aligned}\big\|D_t^{\beta} h\big\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{Z})} &= \left(\int_{t_0}^{T} \left\| \int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{l-\beta-1}}{\Gamma(l-\beta)} h^{(l)}(s)\, ds \right\|_{\mathscr{Z}}^{q} dt\right)^{1/q} \\ &\leq \left(\int_{t_0}^{T} \left(\int_{t_0}^{t} \frac{(t-s)^{(l-\beta-1)\frac{q}{q-1}}}{\Gamma(l-\beta)^{\frac{q}{q-1}}}\, ds\right)^{q-1} \int_{t_0}^{t} \|h^{(l)}(s)\|_{\mathscr{Z}}^{q}\, ds dt\right)^{1/q} \\ &\leq C_{q,\beta} \|h\|_{W_q^l(t_0,T;\mathscr{Z})},\end{aligned}$$

так как

$$(l-\beta-1)\frac{q}{q-1} + 1 = \frac{(l-\beta)q-1}{q-1} > 0$$

по условиям данной теоремы. При $\beta = l$ утверждение тривиально. $\square$

Отображение $N : (t_0, T) \times \mathscr{Z}^n \to \mathscr{Z}$ будем называть *равномерно липшицевым по* $\overline{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, если найдется $c > 0$ такое, что для почти всех $t \in (t_0, T)$ и для любых $\overline{z}, \overline{y} \in \mathscr{Z}^n$

$$\|N(t, \overline{z}) - N(t, \overline{y})\|_{\mathscr{Z}} \leq c \sum_{k=1}^{n} \|z_k - y_k\|_{\mathscr{Z}}.$$

Отображение $N : (t_0, T) \times \mathscr{Z}^n \to \mathscr{Z}$ называется *каратеодориевым*, если для произвольных фиксированных $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathscr{Z}$ он определяет измеримое отображение на (t_0, T) и для почти всех $t \in (t_0, T)$ задает непрерывное по совокупности переменных $z_1, \dots, z_n \in \mathscr{Z}$ отображение.

Теорема 1 [17]. *Пусть* $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $f \in L_q(t_0, T; \mathscr{Z})$, $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathscr{Z}$, $N : (t_0, T) \times \mathscr{Z}^n \to \mathscr{Z}$ *— каратеодориево отображение, равномерно липшицево по* $\overline{z}$, *для всех элементов* $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathscr{Z}$ *и почти всюду на* (t_0, T) *выполнено неравенство*

$$\|N(t, y_1, y_2, \dots, y_n)\|_{\mathscr{Z}} \leq a(t) + c \sum_{k=1}^{n} \|y_k\|_{\mathscr{Z}} \tag{7}$$

для некоторых $a \in L_q(t_0, T; \mathbb{R})$, $c > 0$. *Тогда задача* (5), (6) *имеет единственное сильное решение на* (t_0, T).

Теорема 2 [21]. *Пусть* $\alpha > 1$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n \leq m-2$, *при этом* $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, $l \in \mathbb{N}$, $N \in C^l([t_0, T] \times \mathscr{Z}^n; \mathscr{Z})$ *— равномерно липшицево по* $\overline{z}$ *отображение,* $f \in W_q^l(t_0, T; \mathscr{Z})$ *и для всякой функции* z, *удовлетворяющей* (5), (6), *выполняются равенства*

$$D_t^k\big|_{t=t_0} \left[N\left(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)\right)\right] = -f^{(k)}(t_0),\ k = 0, 1, \dots, l-1. \tag{8}$$

Тогда для всех $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathscr{Z}$ *существует единственное сильное решение* z *задачи* (5), (6) *и* $z \in C^{m-1+l}([t_0, T]; \mathscr{Z})$.

§ 3. Распределенное управление для невырожденного уравнения

Пусть $\mathscr{U}$ — банахово пространство, $B \in \mathscr{L}(\mathscr{U}; \mathscr{Z})$. Рассмотрим задачу распределенного управления

$$D_t^\alpha z(t) = Az(t) + N\left(t, D_t^{\alpha_1} z(t), D_t^{\alpha_2} z(t), \dots, D_t^{\alpha_n} z(t)\right) + Bu(t), \quad t \in (t_0, T), \tag{9}$$

$$z^{(k)}(t_0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{10}$$

$$u \in \mathscr{U}_\partial, \tag{11}$$

$$J(z, u) \to \inf, \tag{12}$$

где $m - 1 < \alpha \leq m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{U}_\partial$ — множество допустимых управлений, J — функционал качества.

Приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3 [23]. *Пусть $\mathscr{X}_0$, $\mathscr{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathscr{X}$ — банахово пространство, $\mathscr{X}_0$ компактно вложено в $\mathscr{X}$, которое непрерывно вложено в $\mathscr{X}_1$, $q, q_1 \in (1, +\infty)$. Тогда при $m \in \mathbb{N}$*

$$W^m_{q,q_1}(t_0, T; \mathscr{X}_0, \mathscr{X}_1) := \left\{z \in W^{m-1}_q(t_0, T; \mathscr{X}_0) : z^{(m)} \in L_{q_1}(t_0, T; \mathscr{X}_1)\right\}$$

с нормой

$$\|x\|_{W^m_{q,q_1}(t_0,T;\mathscr{X}_0,\mathscr{X}_1)} = \|x\|_{W^{m-1}_q(t_0,T;\mathscr{X}_0)} + \|x^{(m)}\|_{L_{q_1}(t_0,T;\mathscr{X}_1)}$$

является банаховым пространством, непрерывно вложенным в $C([t_0, T]; \mathscr{X}_1)$ и компактно вложенным в $W^{m-1}_q(t_0, T; \mathscr{X})$.

Следствие 1 [23]. *Пусть $\mathscr{X}_0$, $\mathscr{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathscr{X}_0$ компактно вложено в $\mathscr{X}_1$, $q \in (1, +\infty)$. Тогда при $m \in \mathbb{N}$ пространство $W^m_q(t_0, T; \mathscr{X}_0)$ компактно вложено в $W^{m-1}_q(t_0, T; \mathscr{X}_1)$.*

Введем в рассмотрение при $q > 1$ пространство

$$\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{Z}) := \left\{ z \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathscr{Z}) \right.$$
$$\left. : J^{m-\alpha}_t \left(z - \sum_{k=0}^{m-1} z^{(k)}(t_0)\widetilde{g}_{k+1} \right) \in W^m_q(t_0, T; \mathscr{Z}) \right\}.$$

Лемма 4 [25]. *Пространство $\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{Z})$ с нормой*

$$\|z\|_{\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{Z})} = \|z\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathscr{Z})} + \left\|D^\alpha_t z\right\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{Z})}$$

банахово.

Множеством допустимых пар $\mathfrak{W}$ для задачи (9)–(12) будем называть такое множество пар (z, u), что $z \in \mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{Z})$ является сильным решением задачи (9), (10) с $u \in \mathscr{U}_\partial$. Решить задачу оптимального управления (9)–(12) означает найти множество пар $(\widehat{z}, \widehat{u}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал стоимости, т. е.

$$J(\widehat{z}, \widehat{u}) = \inf_{(z,u)\in\mathfrak{W}} J(z, u).$$

Определим оператор $\gamma_0 : C([t_0, T]; \mathscr{Z}) \to \mathscr{Z}$, $\gamma_0 z := z(t_0)$.

Коэрцитивность функционала J означает, что для любого $R > 0$ множество $\{(z, u) \in \mathfrak{W} : J(z, u) \le R\}$ ограничено в $\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{Z}) \times \mathscr{U}$.

Пусть $m_k - 1 < \alpha_k \le m_k \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Теорема 3. *Пусть $\alpha > 1$, $\alpha_n \le m - 2$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\mathscr{Z}$, $\mathscr{Z}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathscr{Z}$ компактно вложено в $\mathscr{Z}_1$, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{Z})$, отображение $N_1 : (t_0, T) \times \mathscr{Z}^n_1 \to \mathscr{Z}_1$ каратеодориево и равномерно липшицево по $\overline{z} \in \mathscr{Z}^n_1$, сужение $N : (t_0, T) \times \mathscr{Z}^n \to \mathscr{Z}$ оператора N_1 на $(t_0, T) \times \mathscr{Z}^n$ действует в $\mathscr{Z}$; для всех элементов $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathscr{Z}$ и почти всюду на (t_0, T) верно неравенство (7) при некоторых $a \in L_q(t_0, T; \mathbb{R})$,*

$c > 0$; $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in \mathscr{Z}$. Предположим, что $\mathscr{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_q(t_0, T; \mathscr{U})$, пространство $\mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{Z})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathbb{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathscr{Z}_1)$, функционал качества J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathbb{Y} \times L_q(t_0, T; \mathscr{U})$, коэрцитивный на пространстве $\mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{Z}) \times L_q(t_0, T; \mathscr{U})$. Тогда существует решение $(\widehat{z}, \widehat{u}) \in \mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{Z}) \times \mathscr{U}_\partial$ задачи (9)–(12).

Доказательство. По теореме 1 для любого $u \in \mathscr{U}_\partial$ существует единственное решение задачи (9), (10), поэтому множество допустимых пар $\mathfrak{W}$ непусто.

Пусть $\mathbb{Y}$, $\mathbb{V}$ — линейные нормированные пространства, $\mathbb{Y}_1$, $\mathbb{U}$ — рефлексивные банаховы пространства, причем $\mathbb{Y}_1$ непрерывно вложено в $\mathbb{Y}$. Приведем задачу управления (9)–(12) к виду

$$\mathbb{L}(y, u) + \mathbb{F}(y) = 0,$$

$$u \in \mathscr{U}_\partial,$$

$$J(y, u) \to \inf,$$

где $\mathbb{L} : \mathbb{Y}_1 \times \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ — линейный оператор, нелинейный оператор $\mathbb{F} : \mathbb{Y}_1 \to \mathbb{V}$ непрерывен, $\mathscr{U}_\partial$ — непустое замкнутое выпуклое подмножество пространства управлений $\mathbb{U}$, функционал стоимости $J(y, u)$ выпуклый полунепрерывный снизу и ограниченный снизу на $\mathbb{Y} \times U_\partial$.

Для этого определим пространства $\mathbb{Y}_1 := \mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{Z})$, $\mathbb{U} := L_q(t_0, T; \mathscr{U})$, $\mathbb{V} := L_q(t_0, T; \mathscr{Z}_1) \times \mathscr{Z}^m$ и операторы

$$\mathbb{L}(z, u) := \big(D_t^\alpha z - Az - Bu, \gamma_0 z, \gamma_0 z^{(1)}, \dots, \gamma_0 z^{(m-1)}\big),$$

$$\mathbb{F}(z(\cdot)) := -\big(N\big(\cdot, D_t^{\alpha_1} z(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} z(\cdot)\big), z_0, z_1, \dots, z_{m-1}\big).$$

Непрерывность линейного оператора $\mathbb{L} : \mathbb{Y}_1 \times \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ следует из неравенств

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{L}(z, u)\|_{\mathbb{V}} &= \big\|D_t^\alpha z - Az - Bu, \gamma_0 z, \gamma_0 z^{(1)}, \dots \gamma_0 z^{(m-1)}\big\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{Z}_1)\times\mathscr{Z}^m} \\
&\le \big\|D_t^\alpha z\big\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{Z})} + C_A\|z\|_{C([t_0,T];\mathscr{Z})} + C_B\|u\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{U})} \\
&\quad + \|\gamma_0 z\|_{\mathscr{Z}} + \|\gamma_0 z^{(1)}\|_{\mathscr{Z}} + \dots + \|\gamma_0 z^{(m-1)}\|_{\mathscr{Z}} \\
&\le \big\|D_t^\alpha z\big\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{Z})} + C_1\|z\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathscr{Z})} + C_B\|u\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{U})} \\
&\le C_2(\|z\|_{Q_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{Z})} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{U})}) \le C_2\|(z, u)\|_{Q_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{Z})\times L_q(t_0,T;\mathscr{U})}.
\end{aligned}$$

Для того чтобы мы могли применить теорему 2.4 из [26] нелинейный оператор $\mathbb{F}$ должен удовлетворять условию компактности и непрерывности. Докажем непрерывность нелинейного оператора $\mathbb{F} : \mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{Z}) \to \mathbb{V}$. Из соотношения $\|z_j - z\|_{\mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{Z})} \to 0$ при $j \to \infty$ и равномерной липшицевости оператора N_1 следует, что

$$\begin{aligned}
&\big\|N_1\big(\cdot, D_t^{\alpha_1} z_j(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} z_j(\cdot)\big) - N_1\big(\cdot, D_t^{\alpha_1} z(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n} z(\cdot)\big)\big\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{Z}_1)} \\
&\quad \le C_1 \sum_{k=1}^{n} \big\|D_t^{\alpha_k} z_j - D_t^{\alpha_k} z\big\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{Z})} \le C_2 \sum_{k=1}^{n} \big\|D_t^{\alpha_k} z_j - D_t^{\alpha_k} z\big\|_{C([t_0,T];\mathscr{Z})}
\end{aligned}$$

$$\leq C_3\|z_j - z\|_{C^{m-2}([t_0,T];\mathscr{X})} \to 0.$$

в силу леммы 1, так как $\alpha_n \leq m-2$.

Пространство $\mathbb{Y}_1 = \mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})$ непрерывно вложено в $W_q^{m-1}(t_0,T;\mathscr{X})$, поэтому в силу следствия 1 компактно вложено в $\mathbb{Y}_{-1} := W_q^{m-2}(t_0,T;\mathscr{X}_1)$. Для $v^* \in (L_q(t_0,T;\mathscr{X}_1))^*$ в силу равномерной липшицевости N_1 и леммы 2

$$\begin{aligned}\big|v^*\big(N_1\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}z_j(\cdot),\ldots,D_t^{\alpha_n}z_j(\cdot)\big), z_0, z_1,\ldots,z_{m-1}\big)\\ - N_1\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}z(\cdot),\ldots,D^{\alpha_n}z(\cdot)\big), z_0, z_1,\ldots,z_{m-1}\big)\big)\big|\\ \leq C_1\|v^*\|_{(L_q(t_0,T;\mathscr{X}_1))^*}\sum_{k=1}^{n}\big\|D_t^{\alpha_k}z_j - D_t^{\alpha_k}z\big\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{X})}\\ \leq C_2\|v^*\|_{(L_q(t_0,T;\mathscr{X}_1))^*}\|z_j - z\|_{W_q^{m-2}(t_0,T;\mathscr{X}_1)}.\end{aligned}$$

Таким образом, доказана непрерывная продолжимость функционала $w(\cdot) = v^*(\mathbb{F}(\cdot))$ из $\mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})$ на $\mathbb{Y}_{-1}$.

По теореме 2.4 из [26] получим требуемое. □

Сформулируем аналогичный результат, не используя требование равномерной липшицевости оператора N.

Пусть $S_\delta(\overline{x}) = \{\overline{y} \in \mathscr{X}^n : \|y_k - x_k\|_{\mathscr{X}} \leq \delta,\ k = 0,1,\ldots,n-1\}$. Отображение $N : (t_0,T)\times\mathscr{X}^n \to \mathscr{X}$ будем называть *равномерно по* $t \in (t_0,T)$ *локально липшицевым по* $\overline{x} \in \mathscr{X}^n$, если для каждого $\overline{x} \in \mathscr{X}^n$ найдутся такие $\delta > 0$, $l > 0$, что для всех $\overline{y},\overline{v} \in S_\delta(\overline{x})$ и для почти всех $t \in (t_0,T)$ выполнено неравенство

$$\|N(t,\overline{y}) - N(t,\overline{v})\|_{\mathscr{X}} \leq l\sum_{k=0}^{m-1}\|y_k - v_k\|_{\mathscr{X}}.$$

Теорема 4. *Пусть* $\alpha > 1$, $\alpha_n \leq m-2$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$, $k = 1,2,\ldots,n$, $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}_1$ *— рефлексивные банаховы пространства,* $\mathscr{X}$ *компактно вложено в* $\mathscr{X}_1$, $A \in \mathscr{L}(\mathscr{X})$, $z_0, z_1,\ldots,z_{m-1} \in \mathscr{X}$, *отображение* $N_1 : (t_0,T)\times\mathscr{X}_1^n \to \mathscr{X}_1$ *равномерно по* $t \in (t_0,T)$ *локально липшицево по* $\overline{z} \in \mathscr{X}_1^n$, *сужение* $N : (t_0,T)\times\mathscr{X}^n \to \mathscr{X}$ *оператора* N_1 *на* $(t_0,T)\times\mathscr{X}^n$ *действует в* $\mathscr{X}$. *Предположим, что* $\mathscr{U}_\partial$ *— непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* $L_q(t_0,T;\mathscr{U})$, *при некотором* $u_0 \in \mathscr{U}_\partial$ *существует сильное решение задачи* (9), (10); *пространство* $\mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})$ *непрерывно вложено в банахово пространство* $\mathbb{Y}$, *которое, в свою очередь, непрерывно вложено в* $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathscr{X}_1)$; *функционал качества* J *выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на* $\mathbb{Y}\times L_q(t_0,T;\mathscr{U})$, *коэрцитивный на пространстве* $\mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})\times L_q(t_0,T;\mathscr{U})$. *Тогда существует решение* $(\widehat{z},\widehat{u}) \in \mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})\times\mathscr{U}_\partial$ *задачи* (9)–(12).

Доказательство. Непустота множества $\mathfrak{W}$ обусловлена условием теоремы о существовании сильного решения задачи (9), (10) при некотором $u_0 \in \mathscr{U}_\partial$, а ослабленные условия на нелинейный оператор N (равномерная по $t \in [t_0,T]$ локальная липшицевость по $\overline{z} \in \mathscr{X}_1^n$) в данном случае позволяют, тем не менее, дословно повторить часть доказательства предыдущей теоремы, касающуюся нелинейного оператора $\mathbb{F} : \mathscr{Q}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X}) \to \mathbb{V}$. □

§ 4. Задача Шоуолтера — Сидорова для вырожденного уравнения

Пусть $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ — банаховы пространства, через $\mathscr{L}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$ будем обозначать пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$. Обозначим через $\mathscr{C}l(\mathscr{X};\mathscr{Y})$ множество всех линейных замкнутых операторов с областью определения, плотной в $\mathscr{X}$, действующих в $\mathscr{Y}$. Положим, что $L \in \mathscr{L}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$, $\ker L \neq \{0\}$, $M \in \mathscr{C}l(\mathscr{X};\mathscr{Y})$, D_M — область определения оператора M, снабженная нормой графика $\|\cdot\|_{D_M} := \|\cdot\|_{\mathscr{X}} + \|M\cdot\|_{\mathscr{Y}}$.

Положим $\rho^L(M) := \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y};\mathscr{X})\}$, $R^L_\mu(M) := (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu := L(\mu L - M)^{-1}$. Оператор M называется (L,σ)-*ограниченным*, если

$$\exists a > 0\, \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

В случае (L,σ)-ограниченности оператора M можно определить проекторы

$$P := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)\, d\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{X}), \quad Q := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L^L_\mu(M)\, d\mu \in \mathscr{L}(\mathscr{Y})$$

на пространствах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ соответственно, здесь $\gamma := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ (см. [27, с. 89, 90]). Положим $\mathscr{X}^0 := \ker P$, $\mathscr{X}^1 := \operatorname{im} P$, $\mathscr{Y}^0 := \ker Q$, $\mathscr{Y}^1 := \operatorname{im} Q$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathscr{X}^k$ ($D_{M_k} := D_M \cap \mathscr{X}^k$), $k = 0, 1$.

Теорема 5 [27, с. 90, 91]. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*
(i) $M_1 \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^1;\mathscr{Y}^1)$, $M_0 \in \mathscr{C}l(\mathscr{X}^0;\mathscr{Y}^0)$, $L_k \in \mathscr{L}(\mathscr{X}^k;\mathscr{Y}^k)$, $k = 0, 1$;
(ii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^0;\mathscr{X}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathscr{Y}^1;\mathscr{X}^1)$.

Здесь и далее $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $G = M_0^{-1}L_0$. Для $p \in \mathbb{N}_0$ оператор M называется (L,p)-*ограниченным*, если он (L,σ)-ограничен, $G^p \neq 0$, $G^{p+1} = 0$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$, $N : (t_0,T) \times \mathscr{X}^n \to \mathscr{Y}$ — нелинейный оператор. Как и ранее, $0 \le \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \alpha$, $r-1 < \alpha_n \le r \in \mathbb{N}$, $m-1 < \alpha \le m \in \mathbb{N}$. Рассмотрим обобщенную задачу Шоуолтера — Сидорова

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{13}$$

для полулинейного уравнения

$$LD^\alpha_t x(t) = Mx(t) + N\big(t, D^{\alpha_1}_t x(t), D^{\alpha_2}_t x(t), \dots, D^{\alpha_n}_t x(t)\big) + f(t), \tag{14}$$

где $f : (t_0,T) \to \mathscr{Y}$. Поскольку оператор L при старшей дробной производной является вырожденным, (14) будем называть *вырожденным эволюционным уравнением.*

Функция $x \in C^{m-1}([t_0,T];\mathscr{X}) \cap L_q(t_0,T;D_M)$ называется *сильным решением задачи* (13), (14), если

$$J^{m-\alpha}_t\left(x - \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0)\widetilde{g}_{k+1}\right) \in W^m_q(t_0,T;\mathscr{X}),$$

для нее выполнены условия (13) и почти всюду на (t_0,T) верно равенство (14).

Теорема 6 [23]. *Пусть* $\alpha_n \le m-1$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $p \in \mathbb{N}_0$, *оператор* M (L,p)-*ограничен*, $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathscr{X}^1$, *отображение* $N : [t_0, T] \times \mathscr{X}^n \to \mathscr{Y}$ *каратеодориево, равномерно липшицево по* $\overline{z} \in \mathscr{X}^n$, $\operatorname{im} N \subset \mathscr{Y}^1$, *для всех* $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathscr{X}$ *и почти всюду на* (t_0, T) *выполнено неравенство*

$$\|N(t, z_1, z_2, \dots, z_n)\|_{\mathscr{Y}} \le a(t) + c \sum_{k=1}^{n} \|z_k\|_{\mathscr{X}} \tag{15}$$

при некоторых $a \in L_q(t_0, T; \mathbb{R})$, $c > 0$. *Пусть, кроме того,* $Qf \in L_q(t_0, T; \mathscr{Y}^1)$, $(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in C([t_0, T]; \mathscr{X})$ *и* $D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)f \in L_q(t_0, T; \mathscr{X})$ *для всех* $k = 0, 1, \dots, p$. *Тогда задача* (13), (14) *имеет единственное сильное решение на* (t_0, T).

Теорема 7 [21]. *Пусть* $\alpha > 1$, $\alpha_n \le m-2$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, *оператор* M $(L,0)$-*ограничен*, $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathscr{X}^1$, *отображение* $N : [t_0, T] \times \mathscr{X}^n \to \mathscr{Y}$ *для всех* $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathscr{X}$ *удовлетворяет условию* $N(t, z_1, \dots, z_n) = N_2(t, Pz_1, \dots, Pz_n)$ *для некоторого* $N_2 \in C^{m-1}([t_0, T] \times (\mathscr{X}^1)^n; \mathscr{Y})$. *Пусть, кроме того,* QN_2 *равномерно липшицево по* $\overline{z}$, $(I-Q)N_2 \in C^m([t_0, T] \times (\mathscr{X}^1)^n; \mathscr{Y})$, $f \in W_q^{m-1}(t_0, T; \mathscr{Y})$, $(I-Q)f \in C^m([t_0, T]; \mathscr{Y})$; *для каждого решения* v *задачи*

$$D_t^\alpha v(t) = L_1^{-1} M_1 v(t) + L_1^{-1} Q N_2\big(t, D_t^{\alpha_1} v(t), D_t^{\alpha_2} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)\big) + L_1^{-1} Q f(t), \tag{16}$$

$$v^{(k)}(t_0) = x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1,$$

выполнены условия при $k = 0, 1, \dots, m-2$

$$D_t^k\big|_{t=t_0} \big[L_1^{-1} Q N_2\big(t, D_t^{\alpha_1} v(t), D_t^{\alpha_2} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)\big) + L_1^{-1} Q f(t)\big] = 0. \tag{17}$$

Тогда задача (13), (14) *имеет единственное сильное решение на* (t_0, T).

§ 5. Распределенное управление для вырожденного уравнения

Рассмотрим задачу оптимального управления для вырожденного уравнения

$$L D_t^\alpha x(t) = M x(t) + N\big(t, D_t^{\alpha_1} x(t), \dots, D_t^{\alpha_n} x(t)\big) + B u(t), \quad t \in (t_0, T), \tag{18}$$

$$(Px)^{(k)}(t_0) = x_k, \ k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{19}$$

$$u \in \mathscr{U}_\partial, \tag{20}$$

$$J(x, u) \to \inf, \tag{21}$$

где $\mathscr{U}_\partial$ — множество допустимых управлений, J — функционал качества.

Введем в рассмотрение при $q > 1$ пространство

$$\mathscr{Z}_{\alpha,q} = \Bigg\{ x \in L_q(t_0, T; D_M) \cap C^{m-1}([t_0, T]; \mathscr{X}) \\ : J_t^{m-\alpha} \left(x - \sum_{k=0}^{m-1} x^{(k)}(t_0) \widetilde{g}_{k+1} \right) \in W_q^m(t_0, T; \mathscr{X}) \Bigg\}.$$

Лемма 5 [25]. *Пространство* $\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})$ *с нормой*

$$\|x\|_{\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})} = \|x\|_{L_q(t_0,T;D_M)} + \|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathscr{X})} + \left\|D_t^\alpha x\right\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{X})}$$

банахово.

Множеством допустимых пар $\mathfrak{W}$ для задачи (18)–(21) будем называть такое множество пар (x,u), что $x \in \mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})$ является сильным решением задачи (18), (19) с $u \in \mathscr{U}_\partial$. Решить задачу оптимального управления (18)–(21) означает найти множество пар $(\widehat{x},\widehat{u}) \in \mathfrak{W}$, минимизирующих функционал стоимости, т. е. $J(\widehat{x},\widehat{u}) = \inf\limits_{(x,u)\in\mathfrak{W}} J(x,u)$.

Коэрцитивность функционала J означает, что для любого $R > 0$ множество $\{(x,u) \in \mathfrak{W} : J(x,u) \le R\}$ ограничено в $\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X}) \times \mathscr{U}$.

Теорема 8. *Пусть* $\alpha > 1$, $\alpha_n \le m-2$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$, $k = 1,2,\dots,n$, *оператор* M (L,p)*-ограничен,* $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathscr{X}^1$, $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}_1$ — *рефлексивные банаховы пространства,* $\mathscr{X}$ *компактно вложено в* $\mathscr{X}_1$, $N_1 : (t_0,T) \times \mathscr{X}_1^n \to \mathscr{Y}$ — *каратеодориево равномерно липшицево по* $\overline{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathscr{X}_1^n$ *отображение,* N — *сужение оператора* N_1 *на* $(t_0,T) \times \mathscr{X}^n$, $N[(t_0,T) \times \mathscr{X}^n] \subset \mathscr{Y}^1$; *для всех* $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathscr{X}$ *и почти всюду на* (t_0,T) *выполнено неравенство* (15) *при некоторых* $a \in L_q(t_0,T;\mathbb{R})$, $c > 0$. *Предположим, что* $\mathscr{U}_\partial$ — *непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* $L_q(t_0,T;\mathscr{U})$, *существует такое* $u_0 \in \mathscr{U}_\partial$, *что* $(GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)Bu_0 \in C([t_0,T];\mathscr{X})$, $D_t^\alpha (GD_t^\alpha)^k M_0^{-1}(I-Q)Bu_0 \in L_q(t_0,T;\mathscr{X})$ *для всех* $k = 0,1,\dots,p$. *Пространство* $\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})$ *непрерывно вложено в банахово пространство* $\mathbb{Y}$, *а оно, в свою очередь, непрерывно вложено в пространство* $W_q^{m-2}(t_0,T;\mathscr{X}_1)$; *функционал качества* J *выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на* $\mathbb{Y} \times L_q(t_0,T;\mathscr{U})$, *коэрцитивный на* $\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X}) \times L_q(t_0,T;\mathscr{U})$. *Тогда существует решение* $(\widehat{z},\widehat{u}) \in \mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X}) \times \mathscr{U}_\partial$ *задачи* (18)–(21).

Доказательство. В силу теоремы 6 множество допустимых пар $\mathfrak{W}$ содержит пару $(z_0,u_0) \in \mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X}) \times \mathscr{U}_\partial$, где z_0 — решение задачи (18), (19) при $u = u_0$.

Определим пространства $\mathbb{V} := L_q(t_0,T;\mathscr{X}_1) \times \mathscr{Y}^m$, $\mathbb{Y}_1 := \mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})$, $\mathbb{U} := L_q(t_0,T;\mathscr{U})$ и операторы

$$\mathbb{L}(x,u) := \big(LD_t^\alpha x - Mx - Bu, \gamma_0(Px), \gamma_0(Px)^{(1)}, \dots, \gamma_0(Px)^{(m-1)}\big),$$
$$\mathbb{F}(x(\cdot)) := -\big(N\big(\cdot, D_t^{\alpha_1}x(\cdot), D_t^{\alpha_2}x(\cdot), \dots, D_t^{\alpha_n}x(\cdot)\big), x_0, x_1, \dots, x_{m-1}\big).$$

Непрерывность линейного оператора $\mathbb{L} : \mathbb{Y}_1 \times \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ следует из неравенств

$$\big\|\big(LD_t^\alpha x - Mx - Bu, \gamma_0(Px), \gamma_0(Px)^{(1)}, \dots, \gamma_0(Px)^{(m-1)}\big)\big\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{Y})\times\mathscr{X}^m}$$
$$\le C_1(\|x\|_{\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})} + \|u\|_{L_q(t_0,T;\mathscr{U})} + \|x\|_{C^{m-1}([t_0,T];\mathscr{X})})$$
$$= C\|(x,u)\|_{\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X})\times L_q(t_0,T;\mathscr{U})}.$$

Непрерывность нелинейного оператора $\mathbb{F} : \mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0,T;\mathscr{X}) \to \mathbb{V}$ и выполнение остальных условий теоремы 2.4 из [26] при

$$\mathscr{Z} = \mathscr{X}, \quad \mathscr{Z}_1 = \mathscr{X}_1, \quad \mathbb{Y}_{-1} := W_q^{m-2}(t_0,T;\mathscr{X}_1)$$

доказывается, как в теореме 3. $\square$

Теорема 9. *Пусть* $\alpha > 1$, $\alpha_n \leq m-2$, $q > (\alpha - m + 1)^{-1}$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, *оператор* M $(L,0)$*-ограничен,* $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathscr{X}^1$, $\mathscr{X}, \mathscr{X}_1$ — *рефлексивные банаховы пространства,* $\mathscr{X}$ *компактно вложено в пространство* $\mathscr{X}_1$, *отображение* $N_1 : [t_0, T] \times \mathscr{X}_1^n \to \mathscr{Y}$ *для почти всех* $t \in (t_0, T)$ *и всех* $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathscr{X}$ *удовлетворяет условию* $N(t, z_1, \dots, z_n) = N_2(t, Pz_1, \dots, Pz_n)$ *при некотором* $N_2 \in C^{m-1}([t_0, T] \times (\mathscr{X}^1)^n; \mathscr{Y})$. *Пусть, кроме того,* QN_2 *равномерно липшицево по* $\overline{z}$, $(I-Q)N_2 \in C^m([t_0, T] \times (\mathscr{X}^1)^n; \mathscr{Y})$. *Предположим, что* $\mathscr{U}_\partial$ — *непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства* $L_q(t_0, T; \mathscr{U})$, *существует* u_0 *такое, что* $Bu_0 \in W_q^{m-1}(t_0, T; \mathscr{Y})$, $(I-Q)Bu_0 \in C^m([t_0, T]; \mathscr{Y})$; *для каждого решения* v *задачи*

$$D_t^\alpha v(t) = L_1^{-1} M_1 v(t) + L_1^{-1} Q N_2\big(t, D_t^{\alpha_1} v(t), D_t^{\alpha_2} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)\big) + L_1^{-1} Q B u_0(t),$$

$$v^{(k)}(t_0) = x_k, \ k = 0, 1, \dots, m-1,$$

при $k = 0, 1, \dots, m-2$ *выполняются условия*

$$D_t^k\big|_{t=t_0} \big[L_1^{-1} Q N_2\big(t, D_t^{\alpha_1} v(t), D_t^{\alpha_2} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)\big) + L_1^{-1} Q B u_0(t)\big] = 0;$$

$\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{X})$ *непрерывно вложено в банахово пространство* $\mathbb{Y}$, *которое, в свою очередь, непрерывно вложено в* $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathscr{X}_1)$; *функционал качества* J *выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на* $\mathbb{Y} \times L_q(t_0, T; \mathscr{U})$, *коэрцитивный на пространстве* $\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{X}) \times L_q(t_0, T; \mathscr{U})$. *Тогда существует решение* $(\widehat{z}, \widehat{u}) \in \mathscr{Z}_{\alpha,q} \times \mathscr{U}_\partial$ *задачи* (18)–(21).

Доказательство. Поочередно подействовав на уравнение (18) при $u = u_0$ непрерывными операторами $L_1^{-1} Q$ и $M_0^{-1}(I-Q)$ слева, получим систему

$$\begin{gathered} D_t^\alpha v(t) = S_1 v(t) + L_1^{-1} Q N_2\big(t, D_t^{\alpha_1} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)\big) + L_1^{-1} Q B u_0(t), \\ v^{(k)}(t_0) = P x_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \end{gathered} \tag{22}$$

$$0 = w(t) + M_0^{-1}(I-Q) N_2\big(t, D_t^{\alpha_1} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)\big) + M_0^{-1}(I-Q) B u_0(t) \tag{23}$$

для пары функций $v(t) := Px$, $w(t) := (I-P)x(t)$, где $S_1 = L_1^{-1} M_1$. Задача (22) по теореме 1 имеет единственное решение v из класса $C^{m-1}([t_0, T]; \mathscr{X})$. С учетом этого получим

$$w(t) = -M_0^{-1}(I-Q) N_2\big(t, D_t^{\alpha_1} v(t), \dots, D_t^{\alpha_n} v(t)\big) - M_0^{-1}(I-Q) B u_0(t)$$

из уравнения (23). В силу условий на оператор $(I-Q)N_2$ и теоремы 2 о дополнительной гладкости решения имеем $w \in C^{m-1}([t_0, T]; \mathscr{X}) \cap L_q(t_0, T; D_M)$.

Таким образом, множество допустимых пар непусто. Доказательство разрешимости задачи управления уже представлено в теореме 8. □

Как и в невырожденном случае, заменив условие равномерной липшицевости оператора N условием равномерной по $t \in (t_0, T)$ локальной липшицевости, напрямую потребовав существования допустимой пары и отказавшись от всех условий, которые в предыдущих утверждениях это существование обеспечивали, получим следующий результат.

Теорема 10. *Пусть $\alpha > 0$, $q > (m_k - \alpha_k)^{-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$, оператор M (L, p)-ограничен, $x_0, x_1, \dots, x_{m-1} \in \mathscr{X}^1$, $\mathscr{X}$, $\mathscr{X}_1$ — рефлексивные банаховы пространства, $\mathscr{X}$ компактно вложено в $\mathscr{X}_1$, отображение $N_1 : (t_0, T) \times \mathscr{X}_1^n \to \mathscr{Y}$ равномерно по $t \in (t_0, T)$ локально липшицево по $\overline{z} \in \mathscr{X}_1^n$, $N : (t_0, T) \times \mathscr{X}^n \to \mathscr{Y}$ — сужение оператора N_1 на $(t_0, T) \times \mathscr{X}^n$; предположим, что $\mathscr{U}_\partial$ — непустое выпуклое замкнутое подмножество пространства $L_q(t_0, T; \mathscr{U})$, для некоторого $u_0 \in \mathscr{U}_\partial$ существует сильное решение задачи* (18), (19); *пространство $\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{X})$ непрерывно вложено в банахово пространство $\mathbb{Y}$, которое, в свою очередь, непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathscr{X}_1)$, функционал качества J выпуклый, ограниченный снизу и полунепрерывный снизу на $\mathbb{Y} \times L_q(t_0, T; \mathscr{U})$, коэрцитивный на $\mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{X}) \times L_q(t_0, T; \mathscr{U})$. Тогда существует решение $(\widehat{z}, \widehat{u}) \in \mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{X}) \times \mathscr{U}_\partial$ задачи* (18)–(21).

§ 6. Задача оптимального управления для одной системы уравнений

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим систему уравнений

$$a(1 - \mu_1\Delta) D_t^\alpha z + (b - \mu_2\Delta) D_t^{\alpha_1} z - \mu_3 \Delta z + a^2 (D_t^{\alpha_2} z \cdot \nabla) D_t^{\alpha_2} z + b^2 (z \cdot \nabla) z$$
$$+ ab[(D_t^{\alpha_3} z \cdot \nabla) z + (z \cdot \nabla) D_t^{\alpha_3} z] + r = u, \quad (x, t) \in \Omega \times (t_0, T), \tag{24}$$

$$\nabla \cdot z = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times (t_0, T), \tag{25}$$

с граничным условием

$$z(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times (t_0, T), \tag{26}$$

и начальным условием

$$D_t^k z(x, 0) = z_k(x), \quad k = 0, \dots, m - 1, \quad x \in \Omega, \tag{27}$$

которая при $\alpha = 2$, $\alpha_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, моделирует движение жидкости Кельвина — Фойгта порядка $L = 1$ (система уравнений (0.47) в работе [28]). Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$ — пространственные переменные, $z = (z_1, z_2, z_3)$ — функция памяти от вектора скорости, задаваемая интегралом Вольтерра от него, $r = \nabla p$ — градиент давления жидкости. Константы $a, b, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ заданы.

Пусть $\mathbb{L}_2 = (L_2(\Omega))^3$, $\mathbb{H}^1 = (W_2^1(\Omega))^3$, $\mathbb{H}^2 = (W_2^2(\Omega))^3$. Замыкание линеала $\mathfrak{L} = \{v \in (C_0^\infty(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0\}$ по норме $\mathbb{L}_2$ обозначим через $\mathbb{H}_\sigma$, а по норме $\mathbb{H}^1$ — через $\mathbb{H}_\sigma^1$. Будем использовать также обозначения $\mathbb{H}_\sigma^2 = \mathbb{H}_\sigma^1 \cap \mathbb{H}^2$, $\mathbb{H}_\pi$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma$ в $\mathbb{L}_2$, $\Sigma : \mathbb{L}_2 \to \mathbb{H}_\sigma$, $\Pi = I - \Sigma$ — соответствующие ортопроекторы, $\mathbb{H}_\pi^1$ — ортогональное дополнение к $\mathbb{H}_\sigma^1$ в $\mathbb{H}^1$, $\Sigma_1 : \mathbb{H}^1 \to \mathbb{H}_\sigma^1$, $\Pi_1 = I - \Sigma_1$ — соответствующие ортопроекторы.

Оператор $A = \Sigma\Delta$, продолженный до замкнутого оператора в пространстве $\mathbb{H}_\sigma$ с областью определения $\mathbb{H}_\sigma^2$, имеет вещественный отрицательный дискретный конечнократный спектр, сгущающийся только на $-\infty$ [29]. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ его собственные значения, занумерованные по невозрастанию с учетом кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированную систему соответствующих собственных функций, которая образует базис в $\mathbb{H}_\sigma$ [29]. Определим линеал

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j \varphi_j : v_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n \right\},$$

где N зависит от v, обозначим через $\mathbb{H}^3_\sigma$ замыкание E_∞ по норме

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_k|^3 |v_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Заметим, что $\mathbb{H}^1_\sigma$ и $\mathbb{H}^2_\sigma$ совпадают с замыканиями E_∞ по нормам

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_k| |v_k|^2 \right)^{1/2} \text{ и } \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_k|^2 |v_k|^2 \right)^{1/2}$$

соответственно (см. [26]).

Зададим пространства

$$\mathscr{X} = \mathbb{H}^3_\sigma \times \mathbb{H}^1_\pi, \quad \mathscr{X}_1 = \mathbb{H}^2_\sigma \times \mathbb{H}_\pi, \quad \mathscr{Y} = \mathscr{U} = \mathbb{H}^1 = \mathbb{H}^1_\sigma \times \mathbb{H}^1_\pi. \tag{28}$$

Множество допустимых управлений $\mathscr{U}_\partial$ состоит из вектор-функций $u = u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x)) \in \mathbb{H}^1$, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1} \leq R. \tag{29}$$

Функционал стоимости при заданных $z_d \in Z_{\alpha,2}\big(t_0, T; \mathbb{H}^3_\sigma\big)$, $r_d \in Z_{\alpha,2}\big(t_0, T; \mathbb{H}^1_\pi\big)$, $u_d \in L_2(t_0, T; \mathbb{H}^1)$ имеет вид

$$J(z, r, u) = \|z - z_d\|^2_{Z_{\alpha,2}(t_0,T;\mathbb{H}^3_\sigma)} + \|r - r_d\|^2_{Z_{\alpha,2}(t_0,T;\mathbb{H}^1_\pi)} + \delta \|u - u_d\|^2_{L_2(t_0,T;\mathbb{H}^1)} \to \inf. \tag{30}$$

При таком выборе пространств задачу (24)–(27) можно свести к абстрактной задаче (18), (19) с помощью операторов

$$L = \begin{pmatrix} a(I - \mu_1 A) & \mathbb{O} \\ -a\mu_1 \Pi\Delta & \mathbb{O} \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathscr{X}; \mathscr{Y}), \quad M = \begin{pmatrix} \mu_3 A & \mathbb{O} \\ \mu_3 \Pi\Delta & -I \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathscr{X}; \mathscr{Y}). \tag{31}$$

Нелинейный оператор $N : \mathscr{X}^4 \to \mathscr{Y}$ задается формулой

$$N(t, v, v_1, v_2, v_3) = -(b - \mu_2 \Delta) v_1 - a^2 (v_2 \cdot \nabla) v_2 - b^2 (v \cdot \nabla) v - ab[(v_3 \cdot \nabla) v + (v \cdot \nabla) v_3]. \tag{32}$$

Лемма 6. *Пусть пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ определены в (28), а операторы L и M — формулами (31), $\mu_1 \neq 0$, $\mu_1^{-1} \notin \sigma(A)$. Тогда оператор M $(L, 0)$-ограничен, при этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ \mu_3 \Pi\Delta (I - \mu_1 A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & \mathbb{O} \\ -\mu_1 \Pi\Delta (I - \mu_1 A)^{-1} & \mathbb{O} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Доказательство. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в $\mathbb{L}_2$. Для любого $v\in\mathbb{H}^1_\sigma$ при $|\mu|>\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\frac{|\mu_3\lambda_k|}{|a(1-\mu_1\lambda_k)|}$

$$\|(\mu aI-(\mu a\mu_1+\mu_3)A)^{-1}v\|^2_{\mathbb{H}^3_\sigma}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\lambda_k|^3|\langle v,\varphi_k\rangle|^2}{|\mu a-(\mu a\mu_1+\mu_3)\lambda_k|^2}$$
$$\le C_1\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k||\langle v,\varphi_k\rangle|^2=C_1\|v\|_{\mathbb{H}^1_\sigma},$$

поэтому $(\mu aI-(\mu a\mu_1+\mu_3)A)^{-1}\in\mathscr{L}\big(\mathbb{H}^1_\sigma;\mathbb{H}^3_\sigma\big)$. При таких $\mu\in\mathbb{C}$ оператор

$$(\mu L-M)^{-1}=\begin{pmatrix}(\mu aI-(\mu a\mu_1+\mu_3)A)^{-1} & \mathbb{O}\\ (\mu a\mu_1+\mu_3)\Pi\Delta(\mu aI-(\mu a\mu_1+\mu_3)A)^{-1} & I\end{pmatrix}$$

непрерывно действует из $\mathbb{H}^1$ в $\mathbb{H}^3_\sigma\times\mathbb{H}^1_\pi$. Таким образом, оператор M (L,σ)-ограничен, при этом

$$R^L_\mu(M)=\begin{pmatrix}(\mu aI-(\mu a\mu_1+\mu_3)A)^{-1}a(I-\mu_1A) & \mathbb{O}\\ (\mu a\mu_1+\mu_3)\Pi\Delta(\mu aI-(\mu a\mu_1+\mu_3)A)^{-1}a(I-\mu_1A)-a\mu_1\Pi\Delta & \mathbb{O}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\mu}(I-\frac{\mu_3}{\mu a}(I-\mu_1A)^{-1}A)^{-1} & \mathbb{O}\\ (a\mu_1+\mu_3/\mu)\Pi\Delta(I-\frac{\mu_3}{\mu a}(I-\mu_1A)^{-1}A)^{-1}-a\mu_1\Pi\Delta & \mathbb{O}\end{pmatrix},$$

$$L^L_\mu(M)=\begin{pmatrix}a(I-\mu_1A)(\mu aI-(\mu a\mu_1+\mu_3)A)^{-1} & \mathbb{O}\\ -a\mu_1\Pi\Delta(\mu aI-(\mu a\mu_1+\mu_3)A)^{-1} & \mathbb{O}\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{\mu}(I-\frac{\mu_3}{\mu a}A(I-\mu_1A)^{-1})^{-1} & \mathbb{O}\\ -\frac{\mu_1}{\mu}\Pi\Delta(I-\mu_1A)^{-1}(I-\frac{\mu_3}{\mu a}A(I-\mu_1A)^{-1})^{-1} & \mathbb{O}\end{pmatrix}.$$

Отсюда с помощью формул

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^L_\mu(M)\,d\mu\in\mathscr{L}(\mathscr{X}),\quad Q=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma L^L_\mu(M)\,d\mu\in\mathscr{L}(\mathscr{Y}),$$

вычисляются проекторы (33). Так как $L(I-P)=\mathbb{O}$, то $L_0=\mathbb{O}$, $G=\mathbb{O}$, поэтому оператор M $(L,0)$-ограничен. $\square$

Зададим

$$\psi(s,t)=\psi_0(s)+(t-t_0)\psi_1(s)+\dots+\frac{(t-t_0)^{m-2}}{(m-2)!}\psi_{m-2}(s)+\frac{(t-t_0)^{m-1}}{(m-1)!}\psi_{m-1}(s).$$

Как и прежде, $m_i-1<\alpha_i\le m_i\in\mathbb{N}$.

Теорема 11. *Пусть* $\alpha_i=m_i$ *либо* $m_i-\alpha_i>1/q$ *для всех* $i=1,2,3$, $\alpha_i<\alpha$, $i=1,2,3$, $\mu_1\ne0$, $\mu_1^{-1}\notin\sigma(A)$, $\delta>0$, $z_k\in\mathbb{H}^3_\sigma$, $k=0,\dots,m-1$,

$$\big\|a(1-\mu_1\Delta)D^\alpha_t\psi+(b-\mu_2\Delta)D^{\alpha_1}_t\psi-\mu_3\Delta\psi+a^2\big(D^{\alpha_2}_t\psi\cdot\nabla\big)D^{\alpha_2}_tz$$
$$+b^2(\psi\cdot\nabla)\psi+ab\big[\big(D^{\alpha_3}_t\psi\cdot\nabla\big)\psi+(\psi\cdot\nabla)D^{\alpha_3}_t\psi\big]\big\|_{L_q(t_0,T;\mathbb{H}^1)}\le R.$$

Тогда существует решение $(\widehat{z}, \widehat{r}, \widehat{u}) \in W_q^m(t_0, T; \mathscr{X}) \times \mathscr{U}_\partial$ *задачи* (24)–(27), (29), (30).

Доказательство. По теореме Реллиха — Кондрашова пространство $\mathscr{X}$ компактно вложено в $\mathscr{X}_1$. Непустота множества допустимых наборов следует из условий теоремы в силу существования допустимой тройки $(z, 0, u_0)$, где $z = \psi$,

$$u_0 = a(1-\mu_1\Delta)D_t^\alpha\psi + (b-\mu_2\Delta)D_t^{\alpha_1}\psi - \mu_3\Delta\psi + a^2\big(D_t^{\alpha_2}\psi\cdot\nabla\big)D_t^{\alpha_2}z \\ + b^2(\psi\cdot\nabla)\psi + ab\big[\big(D_t^{\alpha_3}\psi\cdot\nabla\big)\psi + (\psi\cdot\nabla)D_t^{\alpha_3}\psi\big].$$

Оператор M $(L,0)$-ограничен согласно лемме 5. Нелинейный оператор N не зависит от r и r_t, отсюда в силу непрерывного вложения $\mathbb{H}^3$ в пространство $W_4^2 = (W_4^2(\Omega))^3$ при каждом $t \in [t_0, T]$ имеем

$$\|N(v, v_1, v_2, v_3)\|_{\mathbb{H}^1} \le c_1\|v_1\|_{\mathbb{H}^3} + c_2\|v_2\|_{\mathbb{W}_4^1}\|v_2\|_{\mathbb{W}_4^2} + c_3\|v\|_{\mathbb{W}_4^1}\|v\|_{\mathbb{W}_4^2} \\ + c_4\|v\|_{\mathbb{W}_4^1}\|v_3\|_{\mathbb{W}_4^2} + c_5\|v\|_{\mathbb{W}_4^2}\|v_3\|_{\mathbb{W}_4^1},$$

поэтому $N : (\mathbb{H}_\sigma^3)^4 \to \mathbb{H}^1$.

Кроме того, для $h \in \mathbb{H}_\sigma^3$

$$\|N'_v(v, v_1, v_2, v_3)h\|_{\mathbb{H}^1} = \|b^2(h\cdot\nabla)v + b^2(v\cdot\nabla)h + ab(v_3\cdot\nabla)h + ab(h\cdot\nabla)v_3\|_{\mathbb{H}^1}^2 \\ \le c_1\|v\|_{\mathbb{H}^3}^2\|h\|_{\mathbb{H}^3}^2 + c_2\|v_3\|_{\mathbb{H}^3}^2\|h\|_{\mathbb{H}^3}^2,$$

аналогично получаются неравенства для производных Фреше $N'_{v_i}(v, v_1, v_2, v_3)$, $i = 1, 2, 3$. Поэтому производные Фреше оператора N по переменным v, v_1, v_2, v_3 линейны и непрерывны по v в $\mathscr{L}(\mathscr{X};\mathscr{Y})$, а значит, N локально липшицев по v.

При $\mathbb{Y} = \mathscr{Z}_{\alpha,q}(t_0, T; \mathscr{X})$ все требуемые в теореме 10 условия на функционал (30) выполняются очевидным образом, при этом $\mathbb{Y}$ непрерывно вложено в $W_q^{m-2}(t_0, T; \mathscr{X}_1)$.

Таким образом, при $\delta > 0$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 10. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mainardi F., Paradisi F.* Fractional diffusive waves // J. Comput. Acoustics. 2001. V. 9, N 4. P. 1417–1436.
2. *Mainardi F., Spada G.* Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology // The Europ. Phys. J. Special Topics. 2011. V. 193. P. 133–160.
3. *Учайкин В. В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008.
4. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces: PhD thesis. Eindhoven: Eindhoven University of Technology, University Press Facilities, 2001.
5. *Pruss J.* Evolutionary integral equations and applications. Basel: Birkhäuser-Verl., 1993.
6. *Глушак А. В., Авад Х. К.* О разрешимости абстрактного дифференциального уравнения дробного порядка с переменным оператором // Современная математика. Фундаментальные направления. 2013. Т. 47. С. 18–32.
7. *Kostić M.* Abstract Volterra integro-differential equations. Boca Raton, Fl: CRC Press, 2015.
8. *Debbouche A., Torres D.F.M.* Sobolev type fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with fractional nonlocal conditions // Fractional Calculus Appl. Anal. 2015. V. 18. P. 95–121.
9. *Baleanu D., Machado J.A.T., Luo A.C.J.* Fractional dynamics and control. New York; Dordrecht; Heidelberg; London: Springer-Verl., 2012.

10 *Wang J. R., Zhou Y.* A class of fractional evolution equations and optimal controls // Nonlinear Analysis: Real World Applications. 2011. V. 12, iss. 1. P. 262–272.

11. *Романова Е. А., Федоров В. Е.* Разрешающие операторы линейного вырожденного эволюционного уравнения с производной Капуто. Секториальный случай // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 4. С. 58–72.

12. *Стрелецкая Е. М., Федоров В. Е., Дебуш А.* Задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 1. С. 63–72.

13. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М.* Разрешающие операторы вырожденных эволюционных уравнений с дробной производной по времени // Изв. вузов. Математика. 2015. № 1. С. 71–83.

14. *Федоров В. Е., Гордиевских Д. М., Плеханова М.В.* Уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором под знаком дробной производной // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 10. С. 1367–1375.

15. *Федоров В. Е., Плеханова М. В., Нажимов Р. Р.* Линейные вырожденные эволюционные уравнения с дробной производной Римана — Лиувилля // Сиб. мат. журн. 2018. Т. 59, № 1. С. 171–184.

16. *Plekhanova M. V.* Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative // Math. Methods Appl. Sci. 2016. V. 40. P. 41–44.

17. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* Strong solutions of semilinear equations with lower fractional derivatives // Trends Math. 2020. P. 573–585.

18. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives // Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems (NABVP 2018), Santiago de Compostela, Spain, September 4–7, eds: I. Area, A. Cabada, J.A. Cid, etc., Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 2019. V292, xii+298. Cham: Springer Nature Switzerland AG, 2019. P. 81–93.

19. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* A class of semilinear degenerate equations with fractional lower order derivatives // Stability, Control, Differential Games (SCDG2019), Yekaterinburg, Russia, 16–20 September 2019, eds: T.F. Filippova, V.T. Maksimov, A.M. Tarasyev. Proceedings of the International Conference devoted to the 95th anniversary of Academician N.N. Krasovskii, 2019. P. 444–448.

20. *Плеханова М. В.* Задачи стартового управления для эволюционных уравнений дробного порядка // Челяб. физ.-мат. журн. 2016. Т. 1, вып. 3. С. 15–36.

21. *Plekhanova M., Baybulatova G.* On strong solutions for a class of semilinear fractional degenerate evolution equations with lower fractional derivatives // Math. Methods Appl. Sci. 2020. Accepted.

22. *Plekhanova M. V.* Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations // J. Comput. Appl. Math. 2017. V. 312. P. 39–46.

23. *Байбулатова Г. Д.* Задачи стартового управления для одного класса вырожденных уравнений с младшими дробными производными // Челяб. физ.-мат. журн. 2020. Т. 5, вып. 3. С. 271–284.

24. *Plekhanova M. V., Baybulatova G. D.* Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2019. Mathematical Optimization Theory and Operations Research. 18th International Conference, MOTOR 2019, Ekaterinburg, Russia, July 8–12, 2019. Proceedings: Springer. 2019. P. 501–512.

25. *Плеханова М. В.* Разрешимость задач управления для вырожденных эволюционных уравнений дробного порядка // Челяб. физ.-мат. журн. 2017. Т. 2, вып. 1. С. 53– 65.

26. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. Новосибирск: Науч. книга, 1999.

27. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.

28. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.

29. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости.

М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961.

Поступила в редакцию 18 февраля 2021 г.
После доработки 18 февраля 2021 г.
Принята к публикации 26 мая 2021 г.

Плеханова Марина Васильевна
Челябинский государственный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001;
Южно-Уральский государственный университет
(национально-исследовательский университет),
кафедра вычислительной механики,
пр. Ленина, 76, Челябинск 454080
mariner79@mail.ru

Байбулатова Гузель Дамировна
Челябинский государственный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Бр. Кашириных, 129, Челябинск 454001
baybulatova_g_d@mail.ru

Киен Буй Тронг
Институт математики Вьетнамской академии наук и технологий,
отделение теории управления и оптимизации,
ул. Хоанг Куок Вьет, район Цу-Гижи, 18, Ханой 10307, Вьетнам
btkien@math.ac.vn

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2021. Том 28, № 2

UDC 517.9

DISTRIBUTED CONTROL FOR SEMILINEAR EQUATIONS WITH GERASIMOV—CAPUTO DERIVATIVES

M. V. Plekhanova, G. D. Baybulatova, and B. T. Kien

Abstract: We consider the optimal control problem for semilinear evolution equations with lower fractional derivatives, resolved with respect to the higher fractional derivative, as well as having a degenerate linear operator at it. The nonlinear operator depends on the Gerasimov–Caputo fractional derivatives of lower orders. For the degenerate equation, a nonlinear operator is considered in two cases: if its image lies in the subspace without degeneration and if this operator depends only on the elements of the subspace without degeneration. It is shown that in the case when the solvability of the initial problem, for at least one admissible control, is obvious or can be shown directly, it is possible to prove the existence of an optimal control under a weaker condition of uniform in time local Lipschitz continuity with respect to the phase variables of the nonlinear operator, instead of the condition of its Lipschitz continuity. The theoretical results are applied to an optimal control problem for a system of partial differential equations with fractional time derivatives.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.16.62.004

Keywords: fractional order differential equation, Gerasimov–Caputo fractional derivative, degenerate evolution equation, initial boundary value problem, optimal control problem, distributed control.

REFERENCES

1. *Mainardi F. and Paradisi F.*, "Fractional diffusive waves," J. Comput. Acoustics, **9**, No. 4, 1417–1436 (2001).
2. *Mainardi F. and Spada G.*, "Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology," Eur. Phys. J. Spec. Top., **193**, 133–160 (2011).
3. *Uchaikin V. V.*, "Fractional phenomenology of cosmic ray anomalous diffusion," Usp. Phys., **56**, No. 11, 1074–1119 (2013).
4. *Bajlekova E. G.*, Fractional Evolution Equations in Banach Spaces, PhD Thesis, Eindhoven Univ. Technol., Univ. Press Facilities, Eindhoven (2001).
5. *Pruss J.*, Evolutionary Integral Equations and Applications, Birkhäuser-Verl., Basel (1993).
6. *Glushak A. V. and Avad H. K.*, "On the solvability of an abstract differential equation of fractional order with a variable operator," J. Math. Phys., **202**, No. 5, 637–652 (2014).
7. *Kostić M.*, Abstract Volterra Integro-Differential Equations, CRC Press, Boca Raton, FL (2015).
8. *Debbouche A. and Torres D. F. M.*, "Sobolev type fractional dynamic equations and optimal multi-integral controls with fractional nonlocal conditions," Fract. Calc. Appl. Anal., **18**, 95–121 (2015).
9. *Baleanu D., Machado J. A. T., and Luo A. C. J.*, Fractional Dynamics and Control, Springer-Verl., New York; Dordrecht; Heidelberg; London (2012).

10. *Wang J. R. and Zhou Y.*, “A class of fractional evolution equations and optimal controls,” Nonlinear Anal.: Real World Appl., **12**, No. 1, 262–272 (2011).

11. *Romanova E. A. and Fedorov V. E.*, “Resolving operators of a linear degenerate evolution equation with Caputo derivative. The sectorial case [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **23**, No. 4, 58–72 (2016).

12. *Streletskaya E. M., Fedorov V. E., and Debbouche A.*, “The Cauchy problem for distributed order equations in Banach spaces [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **25**, No. 1, 63–72 (2018).

13. *Fedorov V. E. and Gordievskikh D. M.*, “Resolving operators of degenerate evolution equations with fractional derivative with respect to time,” Russ. Math., **59**, 60–70 (2015).

14. *Fedorov V. E., Gordievskikh D. M., and Plekhanova M. V.*, “Equations in Banach spaces with a degenerate operator under a fractional derivative,” Differ. Equ., **51**, 1360–1368 (2015).

15. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., and Nazhimov R. R.*, “Degenerate linear evolution equations with the Riemann–Liouville fractional derivative,” Sib. Math. J., **59**, No. 1, 136–146 (2018).

16. *Plekhanova M. V.*, “Nonlinear equations with degenerate operator at fractional Caputo derivative,” Math. Methods Appl. Sci., **40**, 41–44 (2016).

17. *Plekhanova M. V. and Baybulatova G. D.*, “Strong solutions of semilinear equations with lower fractional derivatives,” in: Transmutation operators and applications (V. Kravchenko, S. M. Sitnik, eds.) (Birkhäuser Trends Math.), pp. 573–585, Birkhäuser, Basel (2020).

18. *Plekhanova M. V. and Baybulatova G. D.*, “Semilinear equations in Banach spaces with lower fractional derivatives,” in: Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems (NABVP 2018) (Santiago de Compostela, Spain, Sep. 4–7, 2019) (I. Area, A. Cabada, J. A. Cid et al., eds.) pp. 81–93, Springer, Cham (2019) (Springer Proc. Math. Stat.; vol. 292).

19. *Plekhanova M. V. and Baybulatova G. D.*, “A class of semilinear degenerate equations with fractional lower order derivatives,” in: Stability, Control, Differential Games (SCDG 2019) (T. F. Filippova, V. T. Maksimov, and A. M. Tarasyev, eds.), Proc. Int. Conf. Devoted to 95th Anniv. Acad. N. N. Krasovskii (Yekaterinburg, Russia, Sep. 16–20, 2019), pp. 444–448, Yekaterinburg (2019).

20. *Plekhanova M. V.*, “Start control problems for fractional order evolution equations [in Russian],” Chelyab. Fiz.-Mat. Zh., **1**, No. 3, 15–36 (2016).

21. *Plekhanova M. and Baybulatova G.*, “On strong solutions for a class of semilinear fractional degenerate evolution equations with lower fractional derivatives,” Math. Methods Appl. Sci. (2020).

22. *Plekhanova M. V.*, “ Distributed control problems for a class of degenerate semilinear evolution equations,” J. Comput. Appl. Math., **312**, 39–46 (2017).

23. *Baybulatova G. D.*, “Start control problem for a class of degenerate equations with lower order fractional derivatives [in Russian],” Chelyab. Fiz.-Mat. Zh., **5**, No. 3, 271–284 (2020).

24. *Plekhanova M. V. and Baybulatova G. D.*, “Problems of hard control for a class of degenerate fractional order evolution equations,” in: Mathematical Optimization Theory and Operations Research, Proc. 18th Int. Conf. (MOTOR 2019) (Ekaterinburg, Russia, July 8–12, 2019), pp. 501–512, Springer, Cham (2019) (Lect. Notes Comput. Sci.; vol. 11548).

25. *Plekhanova M. V.*, “Solvability of control problems for degenerate evolution equations of fractional order [in Russian],” Chelyab. Fiz.-Mat. Zh., **2**, No. 1, 53–65 (2017).

26. *Fursikov A. V.*, Optimal Control of Distributed Systems, Theory and Applications, AMS, Providence, RI (1999) (Transl. Math. Monogr.; vol. 187).

27. *Sviridyuk G. A. and Fedorov V. E.*, Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators, VSP, Utrecht; Boston (2003).

28. *Oskolkov A. P.*, “Initial-boundary value problems for equations of motion of Kelvin–Voight fluids and Oldroyd fluids,” Proc. Steklov Inst. Math., **179**, 137–182 (1989).

29. *Ladyzhenskaya O. A.*, The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, Gordon and Breach Publ., New York; London; Paris; Montreux; Tokyo; Melbourne (1961).

Submitted February 18, 2021
Revised February 18, 2021
Accepted May 26, 2021

Marina V. Plekhanova
Chelyabinsk State University,
Mathematical Analysis Department,
129 Brothers Kashirin Street, Chelyabinsk 454001, Russia;
South Ural State University (National Research University),
Computational Mechanics Department,
76 Lenin Avenue, Chelyabinsk 454080, Russia
mariner79@mail.ru

Guzel D. Baybulatova
Chelyabinsk State University,
Mathematical Analysis Department,
129 Brothers Kashirin Street, Chelyabinsk 454001, Russia
baybulatova_g_d@mail.ru

Bui Trong Kien
Institute of Mathematics of the Vietnam Academy of Sciences and Technologies,
8 Hoang Quoc Viet road, Caugiay district, Hanoi 10307, Vietnam
btkien@math.ac.vn