Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2019. Том 26, № 4

УДК 539.375

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ В ЗАДАЧЕ О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ КИРХГОФА — ЛЯВА С УСЛОВИЯМИ НЕПРОНИКАНИЯ ДЛЯ ИЗВЕСТНОЙ КОНФИГУРАЦИИ ИЗГИБА

Н. П. Лазарев, М. П. Григорьев

Аннотация. Рассматриваются вариационные задачи теории упругости в области с разрезом, описывающие равновесие пластины с трещиной. Предполагается, что под действием определенных заданных нагрузок пластина имеет деформации с определенной заранее известной конфигурацией кромок вблизи трещины. На кривой в срединной плоскости, соответствующей трещине, заданы краевые условия в виде двух неравенств. В предположении, что параметр δ описывает возмущение трещины, находится производная функционала энергии по отношению к δ. Результаты получены для новых математических моделей с новыми краевыми условиями, описывающими специальный характер контактного взаимодействия кромок пластины.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.18.67.005

Ключевые слова: вариационное неравенство, трещина, условия непроникания, производная функционала энергии.

Введение . В настоящей работе исследуется модель, описывающая равновесие пластины с трещиной, которая проходит вдоль плоскости, перпендикулярной срединной плоскости. В исходном состоянии берега трещины соприкасаются друг с другом. Граничные условия имеют вид системы равенств и неравенств и описывают непроникание в случае заранее известной конфигурации изгиба вблизи трещины. На внешней и внутренней границах области с разрезом, соответствующей срединной поверхности пластины, заданы соответственно условия жесткого защемления и взаимного непроникания берегов трещины. В работе найдена первая производная функционала энергии по отношению к параметру, описывающему возмущение длины трещины. Производная функционала энергии по длине трещины часто применяется в формулировках критериев разрушения [1]. Проблема дифференцирования функционала энергии в линейных задачах достаточно широко изучена (см., например, [2, 3]). В этом случае на берегах разреза ставятся краевые условия вида равенств. В данной

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований и Республикой Саха (Якутия) (проект 18–41–140003).

работе исследуется дифференцирование функционала энергии в задачах теории упругости с нелинейными краевыми условиями, имеющими вид неравенств (см. работы [4–8]).

По сравнению с задачами с широко известным общим условием непроникания для пластины Кирхгофа — Лява, изученным в ряде работ (см. например [9–17]), новый вид краевых условий приводит к тому, что решение ищется в более узком классе функций, соответствующем определенной конфигурации изгиба пластины. Это означает, что решения для общего условия непроникания и для специального условия непроникания могут, вообще говоря, отличаться друг от друга. Таким образом, новые краевые условия и анализ новых постановок задач обеспечивают новизну полученных результатов.

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. Через $\Gamma_{l+\delta}$ обозначим множество $\{(x_1, x_2)|\ 0 \le x_1 \le l+\delta, x_2 = 0\}$, $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$, $l > \delta_0 > 0$. Будем считать, что $\Gamma_{l+\delta_0} \subset \Omega$. Параметр δ описывает возмущение трещины. Для каждого фиксированного $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ срединная поверхность пластины занимает область $\Omega_\delta = \Omega \setminus \Gamma_{l+\delta}$. Область $\Omega_0 = \Omega \setminus \Gamma_l$ соответствует невозмущенной трещине. Срединная поверхность пластины лежит в плоскости $z = 0$, а система координат (x_1, x_2, z) выбирается декартовой. Будем считать, что толщина пластины равна $2h = 2$. Трещина как поверхность в R^3 описывается соотношениями $x_2 = 0$, $-1 \le z \le 1$, $0 \le x_1 \le l+\delta$. Пусть $\chi = (W, w)$ — вектор перемещений точек срединной поверхности пластины, где $W = W(x) = (u(x), v(x))$, $w(x)$ — горизонтальные и вертикальные перемещения соответственно. Перемещения $W^z(x), w^z(x)$ точек (x, z), $x = (x_1, x_2)$, отстоящих от срединной поверхности на величину $z : |z| \le 1$, вычисляются по формулам [18]

$$W^z(x,z) = W(x) - z\nabla w,\ |z| \le 1, \quad w^z(x,z) = w(x).$$

Введем тензор деформаций срединной поверхности пластины [19]

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^i}{\partial x_j} + \frac{\partial w^j}{\partial x_i}\right), \quad w^1 = u,\ w^2 = v \quad (i,j = 1,2)$$

и тензор усилий

$$\sigma_{11}(W) = \varepsilon_{11}(W) + k\varepsilon_{22}(W),$$
$$\sigma_{22}(W) = \varepsilon_{22}(W) + k\varepsilon_{11}(W),$$
$$\sigma_{12}(W) = \sigma_{21}(W) = (1-k)\varepsilon_{12}(W), \quad k = \text{const},\ 0 < k < \frac{1}{2}.$$

Считаем, что на внешней границе выполнены следующие краевые условия:

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = W = 0 \ \text{ на } \ \partial\Omega, \tag{1}$$

где n — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Эти условия описывают жесткое защемление пластины.

Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_\delta)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_\delta)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$. Аналогично подпространство $H^{2,0}(\Omega_\delta)$

пространства $H^2(\Omega_\delta)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на $\partial\Omega$ вместе со всеми первыми производными. Введем обозначение

$$H(\Omega_\delta) = H^{1,0}(\Omega_\delta) \times H^{1,0}(\Omega_\delta) \times H^{2,0}(\Omega_\delta).$$

На трещине (разрезе) зададим условия, описывающие взаимное непроникание противоположных берегов трещины для случая известной конфигурации изгиба пластины вблизи трещины:

$$[v] \geq [w_{,2}\,], \quad [w_{,2}\,] \geq 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_{l+\delta}. \tag{2}$$

где $[V] = V^+ - V^-$ — скачок функции V на $\Gamma_{l+\delta}$, а V^+, V^- соответствуют положительному и отрицательному направлениям оси x_2. Здесь и далее будем использовать обозначения $\phi_{,i} = \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$, $\phi_{,ij} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}$.

Отметим, что в общем случае условие непроникания для пластины записывается в виде [10, 14–16]

$$[v] \geq |[w_{,2}\,]| \quad \text{на} \quad \Gamma_{l+\delta}. \tag{3}$$

Для всех $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ введем множества допустимых перемещений

$$K_\delta(\Omega_\delta) = \{\chi = (W, w) \in H(\Omega_\delta) \mid \chi \text{ удовлетворяет (2)}\}.$$

Очевидно, множества $K_\delta(\Omega_\delta)$ выпуклы и замкнуты в $H(\Omega_\delta)$. Рассмотрим для фиксированного $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ функционал энергии пластины

$$\Pi(\Omega_\delta, \chi) = \frac{1}{2} B_\delta(w, w) + \frac{1}{2}\langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W)\rangle_\delta - \langle f, \chi\rangle_\delta, \tag{4}$$

где скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_\delta$ означают скалярное произведение в $L_2(\Omega_\delta)$, $f = (f_1, f_2, f_3) \in C^1(\overline{\Omega})$ — заданный вектор внешних сил, а билинейная форма $B_\delta(\cdot,\cdot)$ определяется по формуле

$$B_\delta(w, \overline{w}) = \int\limits_{\Omega_\delta} b(w, \overline{w})\, d\Omega_\delta,$$

где

$$b(w, \overline{w}) = w_{,11}\,\overline{w}_{,11} + w_{,22}\,\overline{w}_{,22} + k w_{,11}\,\overline{w}_{,22} + k w_{,22}\,\overline{w}_{,11} + 2(1-k) w_{,12}\,\overline{w}_{,12}\,.$$

Справедливо следующее неравенство Корна [20]:

$$c_1 \|W\|^2_{H^{1,0}(\Omega_\delta)} \leq \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W)\rangle_\delta,$$

и неравенство, полученное с помощью двукратного применения неравенства Пуанкаре:

$$c_2 \|w\|^2_{H^{2,0}(\Omega_\delta)} \leq B_\delta(w, w).$$

На основании предыдущих двух неравенств можно сделать вывод об эквивалентности в $H(\Omega_\delta)$ стандартной нормы и нормы, введенной с помощью следующего выражения:

$$\{\langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W)\rangle_\delta + B_\delta(w, w)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Задачу о равновесии пластины, решение которой удовлетворяет условиям (1) и (2), можно сформулировать как задачу минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений

$$\min_{\bar{\chi}\in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta, \bar{\chi}). \tag{5}$$

В силу коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу функционала $\Pi(\Omega_\delta, \bar{\chi})$ для каждого $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ решение χ_δ задачи (5) существует, причем единственно. Благодаря выпуклости и дифференцируемости функционала $\Pi(\Omega_\delta, \chi)$ задача минимизации (5) при $\delta \in [-\delta_0, \delta_0]$ эквивалентна следующему вариационному неравенству:

$$B_\delta(w_\delta, \overline{w} - w_\delta) + \langle \sigma_{ij}(W_\delta), \varepsilon(\overline{W} - W_\delta)\rangle_\delta \geq \langle f, \bar{\chi} - \chi_\delta\rangle_\delta \quad \forall \bar{\chi} \in K_\delta(\Omega_\delta). \tag{6}$$

Наша цель — доказать существование и найти производную функционала энергии по отношению к параметру δ, описывающему изменение длины трещины

$$\left.\frac{d\Pi(\Omega_\delta, \chi_\delta)}{d\delta}\right|_{\delta=0} = \lim_{\delta\to 0} \frac{\Pi(\Omega_\delta, \chi_\delta) - \Pi(\Omega_0, \chi_0)}{\delta}. \tag{7}$$

2. Вывод формулы для производной. Используем метод для нелинейных задач теории упругости, предложенный в работах [7, 15]. Введем дифференцируемое преобразование, отображающее Ω_δ взаимно однозначно на Ω_0 следующим образом. Рассмотрим функцию $\theta \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что $\theta = 1$ в окрестности точки $x_l = (l, 0)$, $\theta = 0$ в окрестности точки $x_0 = (0, 0)$. Дополнительно потребуем, чтобы $\theta_{,2} = 0$ на $\Gamma_{l+\delta_0}$. Определим преобразование независимых переменных по следующей формуле:

$$y_1 = x_1 - \delta\theta(x_1, x_2), \quad y_2 = x_2, \tag{8}$$

где $y = (y_1, y_2) \in \Omega_0$, $(x_1, x_2) \in \Omega_\delta$. Якобиан преобразования положителен при малых δ и равен

$$q_\delta(x) = \left|\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}\right| = 1 - \delta\theta_{,1}\,.$$

Пусть $x = x(y, \delta)$ — преобразование, обратное к (8). Преобразование $x = x(y, \delta)$ при малых δ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $K_\delta(\Omega_\delta)$ и $K_0(\Omega_0)$.

Действительно, пусть $x \in \Omega_\delta$, $y \in \Omega_0$, $\chi(x) = \hat{\chi}(y)$, где $x = x(y, \delta)$. При этом будут справедливы формулы для производных.

$$u'_{x_1} = \hat{u}'_{y_1}(1 - \delta\theta_{,1}\,), \quad u'_{x_2} = \hat{u}'_{y_1}(-\delta\theta_{,2}\,) + \hat{u}'_{y_2}.$$

Предположим сначала, что $\chi \in K_\delta(\Omega_\delta)$, т. е. $\chi \in H(\Omega_\delta)$, и выполнено неравенство

$$[v] \geq [w_{,2}\,], \quad [w_{,2}\,] \geq 0, \quad x \in \Gamma_{l+\delta}.$$

Отметим, что из условия $y \in \Gamma_l$ согласно (8) следует, что $x \in \Gamma_{l+\delta}$. Имеем соотношение

$$w_{,2}\,(x) = \widehat{w}_{,2}\,(y) - \delta\theta_{,2}\,(x_1, x_2)\widehat{w}_{,1}\,(y).$$

Так как $\theta_{,2} = 0$ на $\Gamma_{l+\delta_0}$, отсюда следует, что $w_{,2}(x) = \widehat{w}_{,2}(y)$ и $\hat{\chi}(y) \in K_0(\Omega_0)$. Аналогично, используя полученные формулы, можно показать обратное: из включения $\hat{\chi} \in K_0(\Omega_0)$ следует принадлежность χ множеству $K_\delta(\Omega_\delta)$.

Для достаточно малых δ решению $\chi_\delta(x)$ задачи равновесия согласно установленному факту можно поставить в соответствие функцию из $K_0(\Omega_0)$: $\hat{\chi}_\delta(y) = \chi_\delta(x)$, $y \in \Omega_0$. При $\delta = 0$ в качестве $\hat{\chi}_0$ примем χ_0. Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма 1. *Имеет место сходимость $\hat{\chi}_\delta \to \chi_0$ сильно в $H(\Omega_0)$.*

Доказательство. Подставляя в вариационное неравенство (6) пробные функции $\bar{\chi} = 0$, $\bar{\chi} = 2\chi_\delta$, выводим равенство

$$B_\delta(w_\delta, w_\delta) + \langle \sigma_{ij}(W_\delta), \varepsilon_{ij}(W_\delta)\rangle_\delta = \langle f, \chi_\delta\rangle_\delta.$$

Осуществим в предыдущем равенстве координатное преобразование (8). Получим

$$B_0(\widehat{w}_\delta, \widehat{w}_\delta) + \langle \sigma_{ij}(\widehat{W}_\delta), \varepsilon_{ij}(\widehat{W}_\delta)\rangle_0 = \langle f^\delta, \hat{\chi}_\delta\rangle_0 + \delta R_1(\delta, \theta, \hat{\chi}_\delta), \tag{9}$$

где

$$f^\delta(y) = \frac{f(x(y,\delta))}{1 - \delta\theta_{,1}(x(y,\delta))}.$$

Для малых δ можно показать, что

$$\|f^\delta\|_{L_2(\Omega_0)} \le C_1, \quad |R_1(\delta, \theta, \hat{\chi}_\delta)| \le C_2\|\hat{\chi}_\delta\|^2,$$

где C_1, C_2 не зависят от δ и $\hat{\chi}_\delta$. Из равенства (9) для достаточно малых δ, используя неравенства Корна (см. [20]) и Гёльдера, получаем

$$C\|\hat{\chi}_\delta\|^2 \le C_1\|\hat{\chi}_\delta\| + |\delta|C_2\|\hat{\chi}_\delta\|^2,$$

постоянная C не зависит от δ и $\hat{\chi}_\delta$. Имея в виду последнюю оценку, легко вывести неравенство, выполненное для достаточно малых δ:

$$\|\hat{\chi}_\delta\| \le C',$$

с не зависящей от δ постоянной C'. Из равномерной ограниченности норм $\|\hat{\chi}_\delta\|$ следует, что последовательность $\{\hat{\chi}_\delta\}$ сходится слабо к некоторой функции $\tilde{\chi}$ в $H(\Omega_0)$. В силу слабой замкнутости $K_0(\Omega_0)$ функция $\tilde{\chi}$ принадлежит множеству $K_0(\Omega_0)$. Применив координатное преобразование (8) к вариационному неравенству (6), получим

$$B_0(\widehat{w}_\delta, \overline{w} - \widehat{w}_\delta) + \langle \sigma_{ij}(\widehat{W}_\delta), \varepsilon(\overline{W} - \widehat{W}_\delta)\rangle_0 \ge \langle f^\delta, \bar{\chi} - \hat{\chi}_\delta\rangle_0 + \delta R_2(\delta, \theta, \hat{\chi}_\delta, \bar{\chi}). \tag{10}$$

Заметим, что это неравенство в силу взаимной однозначности $K_0(\Omega_0)$ и $K_\delta(\Omega_\delta)$ справедливо для всех пробных функций $\bar{\chi}$ из $K_0(\Omega_0)$. Для остаточного члена R_2 в (10) для малых δ справедлива оценка

$$|R_2(\delta, \theta, \hat{\chi}_\delta, \bar{\chi})| \le C_3(\|\hat{\chi}_\delta\|^2 + \|\bar{\chi}\|\|\hat{\chi}_\delta\|)$$

с не зависящей от δ, $\hat{\chi}_\delta$, $\bar{\chi}$ постоянной C_3. Принимая во внимание сильную сходимость f^δ к f в $L_2(\Omega_0)$, перейдем в (10) к пределу при $\delta \to 0$. Воспользовавшись слабой полунепрерывностью снизу билинейных форм $B_0(\cdot,\cdot)$ и $\langle \sigma_{ij}(\cdot), \varepsilon_{ij}(\cdot)\rangle_0$, получим

$$B_0(\widetilde{w}, \overline{w} - \widetilde{w}) + \langle \sigma_{ij}(\widetilde{W}), \varepsilon(\overline{W} - \widetilde{W})\rangle_0 \geq \langle f, \bar{\chi} - \tilde{\chi}\rangle_0.$$

Произвольность $\bar{\chi}$ и предыдущее неравенство обеспечивают справедливость равенства $\tilde{\chi} = \chi_0$. Возвращаясь к равенству (9) и переходя в нем к пределу при $\delta \to 0$, с учетом слабой сходимости $\hat{\chi}_\delta \to \chi_0$ в $H(\Omega_0)$ и сильной сходимости $f^\delta \to f$ в $L_2(\Omega_0)$ находим

$$\lim_{\delta\to 0} B_0(\widehat{w}_\delta, \widehat{w}_\delta) + \langle \sigma_{ij}(\widehat{W}_\delta), \varepsilon_{ij}(\widehat{W}_\delta)\rangle_0 = \lim_{\delta\to 0}\langle f^\delta, \hat{\chi}_\delta\rangle_0 = \langle f, \chi_0\rangle_0. \tag{11}$$

Сравнение двух вариационных неравенств (6), выполненных для пробных функций $\bar{\chi} = 0$ и $\bar{\chi} = 2\chi_0$ при $\delta = 0$, дает возможность получить следующее соотношение:

$$B_0(w_0, w_0) + \langle \sigma_{ij}(W_0), \varepsilon_{ij}(W_0)\rangle_0 = \langle f, \chi_0\rangle_0. \tag{12}$$

Равенства (11) и (12) обеспечивают сильную сходимость $\hat{\chi}_\delta \to \chi_0$ в $H(\Omega_0)$ при $\delta \to 0$. В самом деле, слабая сходимость $\phi_n \to \phi$ при $n \to \infty$ и сходимость норм $\|\phi_n\| \to \|\phi\|$ в $H(\Omega_0)$ при $n \to \infty$ гарантируют сильную сходимость $\phi_n \to \phi$ при $n \to \infty$ в $H(\Omega_0)$ (см. [21]). Из соотношений (11) и (12), благодаря отмеченной ранее эквивалентности норм, следует сходимость $\|\hat{\chi}_\delta\| \to \|\chi_0\|$ при $\delta \to 0$. Лемма доказана.

Справедливо равенство (см. [6])

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{f_i^\delta(y) - f_i(y)}{\delta} = (f_i\theta)_{,1}\,(y), \quad i = 1, 2, 3,$$

причем из включения $f \in C^1(\overline{\Omega})$ следует, что

$$\frac{f_i^\delta(y) - f_i(y)}{\delta} \to (f_i\theta)_{,1}\,(y) \text{ сильно в } L_\infty(\Omega).$$

Введем также следующее обозначение для преобразованного с помощью (8) функционала энергии (4):

$$\Pi_\delta(\Omega_0, \bar{\phi}) = \frac{1}{2} {B_0}^\delta(\bar{\phi}, \bar{\phi}) + \frac{1}{2}\langle {q_\delta}^{-1} {\sigma_{ij}}^\delta(\bar{\phi}), {\varepsilon_{ij}}^\delta(\bar{\phi})\rangle_0 - \langle f^\delta, \bar{\phi}\rangle_0,$$

где билинейные формы ${B_0}^\delta(\cdot,\cdot)$, $\langle {q_\delta}^{-1}{\sigma_{ij}}^\delta(\cdot), {\varepsilon_{ij}}^\delta(\cdot)\rangle_0$ получаются в результате преобразования независимых переменных (8) в соответствующих билинейных формах $B_\delta(\cdot,\cdot)$, и $\langle \sigma_{ij}(\cdot), \varepsilon_{ij}(\cdot)\rangle_\delta$. В целях упрощения записи нижеследующих формул далее целесообразно обозначить через $\chi = (W, w)$, $W = (u, v)$, решение задачи (5) для невозмущенной трещины, т. е. далее будем считать $\chi = \chi_0$.

Теорема 1. *Производная функционала энергии* $\Pi(\Omega_\delta, \chi_\delta)$ *по отношению к параметру* δ *находится по следующей формуле:*

$$\left.\frac{d\Pi(\Omega_\delta, \chi_\delta)}{d\delta}\right|_{\delta=0} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,1}\left(u_{,1}^2 - v_{,2}^2 + \frac{1}{2}(1-k)\big(v_{,1}^2 - u_{,2}^2\big)\right) d\Omega_0$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,2}\,(2v_{,1}\,v_{,2} + (1+k)v_{,1}\,u_{,1} + (1-k)u_{,1}\,u_{,2}\,)\,d\Omega_0$$
$$- \int\limits_{\Omega_0} (w_{,11}\,P^1 + w_{,22}\,P^2 + k(w_{,11}\,P^2 + w_{,22}\,P^1) + 2(1-k)w_{,12}\,P^3)\,d\Omega_0$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,1}\,b(w,w)d\Omega_0 - \int\limits_{\Omega_0} (f\theta)_{,1}\,\chi\,d\Omega_0, \quad (13)$$

где

$$P^1 = 2\theta_{,1}\,w_{,11} + \theta_{,11}\,w_{,1}\,, \quad P^2 = 2\theta_{,2}\,w_{,12} + \theta_{,22}\,w_{,1}\,,$$
$$P^3 = \theta_{,1}\,w_{,11} + \theta_{,2}\,w_{,11} + \theta_{,12}\,w_{,1}\,. \quad (14)$$

Доказательство. Решение χ задачи равновесия для невозмущенной трещины удовлетворяет соотношению

$$\Pi(\Omega_0, \chi) = \min_{\bar\chi \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0, \bar\chi). \quad (15)$$

Аналогично для решений χ_δ имеем

$$\Pi(\Omega_\delta, \chi_\delta) = \min_{\bar\chi \in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta, \bar\chi). \quad (16)$$

Из взаимной однозначности множеств $K_0(\Omega_0)$ и $K_\delta(\Omega_\delta)$ следует, что

$$\min_{\bar\chi \in K_\delta(\Omega_\delta)} \Pi(\Omega_\delta, \bar\chi) = \min_{\bar\chi \in K_0(\Omega_0)} \Pi_\delta(\Omega_0, \bar\chi). \quad (17)$$

Далее не нарушая общности будем считать, что $\delta > 0$.

Имея в виду (15)–(17), получим следующие неравенства:

$$\frac{\Pi(\Omega_\delta, \chi_\delta) - \Pi(\Omega_0, \chi)}{\delta} \le \frac{\Pi_\delta(\Omega_0, \chi) - \Pi(\Omega_0, \chi)}{\delta}, \quad (18)$$

$$\frac{\Pi_\delta(\Omega_0, \hat\chi_\delta) - \Pi(\Omega_0, \hat\chi_\delta)}{\delta} \le \frac{\Pi(\Omega_\delta, \chi_\delta) - \Pi(\Omega_0, \chi)}{\delta} \quad (19)$$

Используя разложения

$$q_\delta{}^{-1}(x(\delta, y)) = 1 + \delta\theta_{,1}\,(y) + r_1(\delta, y),$$
$$f_i{}^\delta(x(\delta, y)) = f_i(y) + \delta(f_i\theta)_{,1}\,(y) + r_2(\delta, y),$$
$$\theta_{,i}\,(x(\delta, y)) = \theta_{,i}\,(y) + \delta\theta_{,i1}\,\theta(y) + r_3(\delta, y),$$
$$\theta_{,ij}\,(x(\delta, y)) = \theta_{,ij}\,(y) + \delta\theta_{,ij1}\,\theta(y) + r_4(\delta, y),$$

где $\frac{r_i(\delta,y)}{\delta} \to 0$ в $L_\infty(\Omega_0)$ при $\delta \to 0$, $i = 1,2,3,4$, функционал $\Pi_\delta(\Omega_0, \bar\chi)$, $\bar\chi = (\overline{W}, \overline{w}) \in K_0(\Omega_0)$, можно представить в виде

$$\Pi_\delta(\Omega_0,\bar\chi) = \Pi(\Omega_0,\bar\chi) - \frac{\delta}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,1}\left(\bar u_{,1}^{\,2} - \bar v_{,2}^{\,2} + \frac{1}{2}(1-k)\big(\bar v_{,1}^{\,2} - \bar u_{,2}^{\,2}\big)\right) d\Omega_0$$
$$- \frac{\delta}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,2}\,(2\bar v_{,1}\,\bar v_{,2} + (1+k)\bar v_{,1}\,\bar u_{,1} + (1-k)\bar u_{,1}\,\bar u_{,2}\,)\,d\Omega_0$$
$$- \delta\int\limits_{\Omega_0} (\overline{w}_{,11}\,\overline{P}^1 + \overline{w}_{,22}\,\overline{P}^2 + k(\overline{w}_{,11}\,\overline{P}^2 + \overline{w}_{,22}\,\overline{P}^1) + 2(1-k)\overline{w}_{,12}\,\overline{P}^3)\,d\Omega_0$$
$$+ \frac{\delta}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,1}\,b(\overline{w},\overline{w})d\Omega_0 - \delta\int\limits_{\Omega_0} (f\theta)_{,1}\,,\bar\chi\,d\Omega_0 + o(\delta)R_3(\delta,\theta,\bar\chi), \quad (20)$$

где функции $\overline{P}^i$, $i = 1,2,3$, вычисляются по формулам, аналогичным (14). Остаточный член $R_3(\delta,\theta,\bar\chi)$ для малых δ оценивается следующим образом:

$$|R_3(\delta,\theta,\bar\chi)| \le C_4(\|\bar\chi\|^2 + \|\bar\chi\|),$$

где постоянная C_4 не зависит от δ и $\bar\chi$. Устремляя $\delta \to 0$ в неравенстве (18), с учетом (20) получим

$$\overline{\lim_{\delta\to 0}}\,\frac{\Pi(\Omega_\delta,\chi_\delta) - \Pi(\Omega_0,\chi)}{\delta} \le -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,1}\left(u_{,1}^{\,2} - v_{,2}^{\,2} + \frac{1}{2}(1-k)\big(v_{,1}^{\,2} - u_{,2}^{\,2}\big)\right) d\Omega_0$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,2}\,(2v_{,1}\,v_{,2} + (1+k)v_{,1}\,u_{,1} + (1-k)u_{,1}\,u_{,2}\,)\,d\Omega_0$$
$$- \int\limits_{\Omega_0} (w_{,11}\,P^1 + w_{,22}\,P^2 + k(w_{,11}\,P^2 + w_{,22}\,P^1) + 2(1-k)w_{,12}\,P^3)\,d\Omega_0$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,1}\,b(w,w)d\Omega_0 - \int\limits_{\Omega_0} (f\theta)_{,1}\,\chi\,d\Omega_0.$$

С другой стороны, в силу сильной сходимости $\hat\chi_\delta \to \chi$ в $H(\Omega_0)$, оценки (19) и представления (20) получаем

$$\underline{\lim_{\delta\to 0}}\,\frac{\Pi(\Omega_\delta,\chi_\delta) - \Pi(\Omega_0,\chi)}{\delta} \ge -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,1}\left(u_{,1}^{\,2} - v_{,2}^{\,2} + \frac{1}{2}(1-k)\big(v_{,1}^{\,2} - u_{,2}^{\,2}\big)\right) d\Omega_0$$
$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,2}\,(2v_{,1}\,v_{,2} + (1+k)v_{,1}\,u_{,1} + (1-k)u_{,1}\,u_{,2}\,)\,d\Omega_0$$
$$- \int\limits_{\Omega_0} (w_{,11}\,P^1 + w_{,22}\,P^2 + k(w_{,11}\,P^2 + w_{,22}\,P^1) + 2(1-k)w_{,12}\,P^3)\,d\Omega_0$$
$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \theta_{,1}\,b(w,w)d\Omega_0 - \int\limits_{\Omega_0} (f\theta)_{,1}\,\chi\,d\Omega_0.$$

Из последних двух неравенств следует существование предела

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\Pi(\Omega_\delta,\chi_\delta)-\Pi(\Omega_0,\chi)}{\delta}.$$

Теорема доказана.

Таким образом, производная функционала энергии по отношению к параметру δ, описывающему изменение длины трещины, существует и определяется по формуле (13). Заметим, что производная функционала энергии не зависит от θ. В самом деле, в предельном соотношении для производной (7) правая часть не зависит от θ.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.

2. *Мазья В. Г., Назаров С. А.* Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.

3. Ohtsuka K. Generalized J-integral and its applications. I. Basic theory // Japan J. Appl. Math. 1985. V. 2. P. 329–350.

4. *Khludnev A. M., Ohtsuka K., Sokolowski J.* On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60, N 1. P. 99–109.

5. *Bach M., Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Derivatives of the energy functional for 2D-problems with a crack under Signorini and friction conditions // Math. Meth. Appl. Sci. 2002. V. 23, N. 6. P. 515–534.

6. *Соколовский Я., Хлуднев А. М.* О производной функционала энергии по длине трещины в задачах теории упругости // Прикл. математика и механика. 2000. Т. 64, № 3. С. 464–475.

7. *Рудой Е. М.* Формула Гриффитса для пластины с трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 3. С. 155–161.

8. *Neustroeva N. V., Afanas'eva N. M., Egorova A. A.* A variational problem for an elastic body with periodically located cracks // Мат. заметки СВФУ. 2019. V. 26, № 2. С. 17–30.

9. *Lazarev N. P., Tani A., Sivtsev P. V.* Optimal radius of a rigid cylindrical inclusion in nonhomogeneous plates with a crack // Мат. заметки СВФУ. 2019. V. 26, № 1. С. 46–58.

10. *Khludnev A. M.* Contact problem for a plate having a crack of minimal opening // Control and Cybernetics. 1996. V. 25, N 3. P. 605–620.

11. *Shcherbakov V.* Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks // Z. Angew. Math. Phys. 2016. V. 67, N 3. 71 p.

12. *Рудой Е. М.* Асимптотика функционала энергии для смешанной краевой задачи четвертого порядка в области с разрезом // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 2. С. 341–354.

13. *Khludnev A. M.* Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates // Europ. J. Mech. A Solids. 2012. V. 32, N 1. P. 69–75.

14. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* Modelling and control in solid mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser-Verl., 1997.

15. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks on solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.

16. *Рудой Е. М.* Устойчивость решения задачи равновесия пологой оболочки, содержащей трещину // Сиб. журн. индустр. математики. 2001. Т. 4, № 1. С. 171–176.

17. *Lazarev N.* Existence of an optimal size of a delaminated rigid inclusion embedded in the Kirchhoff–Love plate // Boundary value problems. 2015. V. 2015, N 1, art. no. 180.

18. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.

19. *Работнов Ю. И.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.

20. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

21. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 10 августа 2019 г.
После доработки 10 ноября 2019 г.
Принята к публикации 27 ноября 2019 г.

Лазарев Нюргун Петрович,
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000;
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
nyurgun@ngs.ru

Григорьев Марк Петрович
Северо-Восточный федеральный университет имени М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677000
mp.grigorev@s-vfu.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2019. Том 26, № 4

UDC 539.375

DIFFERENTIATION OF THE ENERGY FUNCTIONALS FOR EQUILIBRIUM PROBLEMS OF THE KIRCHHOFF—LOVE PLATES WITH NONPENETRATION CONDITIONS FOR KNOWN CONFIGURATIONS OF PLATE EDGES

N. P. Lazarev and M. P. Grigoryev

Abstract. Equilibrium problems for elastic plates with a rectilinear crack are studied. It is assumed that under the action of certain given loads, plates have deformations with a certain predetermined configuration of edges near the crack. On the crack curve, we impose a nonlinear boundary condition as an inequality describing the nonpenetration of the opposite crack faces. Assuming that the parameter δ describes the crack perturbation, the derivative of the energy functional with respect to δ is found. The results are obtained for new mathematical models with new nonlinear boundary conditions describing special character of the mechanical contact interaction of the plate edges.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.18.67.005

Keywords: variational inequality, crack, nonpenetration condition, energy functional derivative.

REFERENCES

1. *Cherepanov G. P.*, Mechanics of Brittle Fracture [in Russian], Nauka, Moscow (1974).
2. *Maz'ya V. G. and Nazarov S. A.*, "Asymptotics of energy integrals under small perturbations of the boundary close to angular and conic points," Tr. Mosk. Mat. O.-va, **50**, 79–129 (1987).
3. *Ohtsuka K.*, "Generalized J-integral and its applications. I. Basic theory," Jap. J. Appl. Math., **2**, 329–350 (1985).
4. *Khludnev A. M., Ohtsuka K., and Sokolowski J.*, "On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions," Quart. Appl. Math., **60**, No. 1, 99–109 (2002).
5. *Bach M., Khludnev A. M., and Kovtunenko V. A.*, "Derivatives of the energy functional for 2D-problems with a crack under Signorini and friction conditions," Math. Meth. Appl. Sci., **23**, No. 6, 515–534 (2002).
6. *Sokolowski Ya. and Khludnev A. M.*, "On derivative of the energy functional with respect to a crack length in the elasticity theory [in Russian]," Prikl. Mat. Mekh., **64**, No. 3, 464–475 (2000).
7. *Rudoy E. M.*, "Griffith formula for a cracked plates [in Russian]," Sib. Zh. Ind. Mat., **5**, No. 3, 155–161 (2002).
8. *Neustroeva N. V., Afanas'eva N. M., and Egorova A. A.*, "A variational problem for an elastic body with periodically located cracks [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **26**, No. 2, 17–30 (2019).
9. *Lazarev N. P., Tani A., and Sivtsev P. V.*, "Optimal radius of a rigid cylindrical inclusion in nonhomogeneous plates with a crack [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **26**, No. 1, 46–58 (2019).

10. *Khludnev A. M.*, "Contact problem for a plate having a crack of minimal opening," Contr. Cybern., **25**, No. 3, 605–620 (1996).
11. *Shcherbakov V.*, "Shape optimization of rigid inclusions for elastic plates with cracks," Z. Angew. Math. Phys., **67**, No. 3, 71 p (2016).
12. *Rudoy E. M.*, "Asymptotics of the energy functional for a fourth-order mixed boundary value problem in a domain with a cut," Sib. Math. J., **50**, No. 2, 341–354 (2009).
13. *Khludnev A. M.*, "Thin rigid inclusions with delaminations in elastic plates," Eur. J. Mech. A Solids, **32**, No. 1, 69–75 (2012).
14. *Khludnev A. M. and Sokolowski J.*, Modelling and Control in Solid Mechanics, Birkhauser-Verl., Basel; Boston; Berlin (1997).
15. *Khludnev A. M. and Kovtunenko V. A.*, Analysis of Cracks on Solids, WIT Press, Southampton; Boston (2000).
16. *Rudoy E. M.*, "Stability of a solution of the equilibrium problem for a shallow shell with a crack under perturbation of the boundary [in Russian]," Sib. Zh. Ind. Mat., **4**, No. 1, 171–176 (2001).
17. *Lazarev N.*, "Existence of an optimal size of a delaminated rigid inclusion embedded in the Kirchhoff–Love plate," Boundary Value Probl., **2015**, No. 1, art. no. 180 (2015).
18. *Volmir A. S.*, Nonlinear Dynamics of Plates and Shells [in Russian], Nauka, Moscow (1972).
19. *Rabotnov Yu. N.*, Mechanics of a Deformable Rigid Body [in Russian], Nauka, Moscow (1988).
20. *Duvaut G. and Lions J. L.*, Inequalities in Mechanics and Physics, Springer-Verl., Berlin (1976).
21. *Kantorovich L. V. and Akilov G. P.*, Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1984).

Submitted August 10, 2019
Revised November 10, 2019
Accepted November 27, 2019

Nyurgun P. Lazarev
Ammosov North-Eastern Federal University,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677980, Russia;
Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS,
15 Lavrentiev Avenue, Novosibirsk 630090, Russia
nyurgun@ngs.ru

Mark P. Grigoryev Ammosov North-Eastern Federal University,
48 Kulakovsky Street, Yakutsk 677980, Russia
mp.grigorev@s-vfu.ru