Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

УДК 517.946

ВЫРОЖДЕНИЕ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

А. И. Кожанов, Г. А. Лукина

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости краевых задач для дифференциальных уравнений

$$\varphi(t)u_t + (-1)^m\psi(t)D_x^{2m+1}u + c(x,t)u = f(x,t),$$

$$\varphi(t)u_{tt} + (-1)^{m+1}\psi(t)D_x^{2m+1}u + c(x,t)u = f(x,t),$$

в которых $x \in (0,1)$, $t \in (0,T)$, m — целое неотрицательное число, $D_x^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ ($D_x^1 = D_x$), функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неотрицательны и обращаются в нуль в некоторых точках отрезка $[0,T]$. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений (решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение).

DOI: 10.25587/SVFU.2021.91.97.002

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с кратными характеристиками, вырождение, краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

В настоящей работе изучается разрешимость в пространствах Соболева краевых задач для дифференциальных уравнений

$$\varphi(t)u_t + (-1)^m\psi(t)D_x^{2m+1}u + c(x,t)u = f(x,t), \tag{$*$}$$

$$\varphi(t)u_{tt} + (-1)^{m+1}\psi(t)D_x^{2m+1}u + c(x,t)u = f(x,t), \tag{$**$}$$

в которых m — целое неотрицательное число, D_x^k — частная производная $\frac{\partial^k}{\partial x^k}$ ($D_x^1 = D_x$), функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ неотрицательные и могут обращаться в нуль.

Дифференциальные уравнения ($*$) и ($**$) в случае строго положительных функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в литературе в последнее время называют *уравнениями с кратными характеристиками* [1]. Заметим, что в класс уравнений ($*$) входит линеаризованное уравнение Кортевега — де Вриза [2]. Различные краевые задачи для уравнений ($*$) и ($**$), а также их нелинейных аналогов в случае, когда функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ не обращаются в нуль, изучены достаточно хорошо (см. [3–12].

Вырождающиеся уравнения $(*)$ изучались в [13, 14]. В этих работах было установлено, что при выполнении некоторых условий, одним из которых было условие дифференцируемости функции $\varphi(t)$ при наличии вырождения при производной по времени, т. е. при обращении коэффициента $\varphi(t)$ в нуль при $t = 0$, для уравнений $(*)$ будет корректной задача без задания начального условия. В настоящей работе показано, что для уравнений $(*)$ при выполнении условия $\varphi(0) = 0$ корректной может быть естественная начально-краевая задача с заданием обычных начальных условий; более того, будет показано, что корректность естественных краевых задач для уравнений $(*)$ имеет место и без условия существования производной у функции $\varphi(t)$.

Что касается уравнений $(**)$, то здесь также будет показано, что для них корректна задача без освобождения начального или конечного многообразий от несения граничных данных, и при этом условие дифференцируемости функции $\varphi(t)$ вновь требоваться не будет.

Настоящая работа состоит из двух частей. В первой из них изучается разрешимость краевых задач для уравнений $(*)$ и $(**)$ в прямоугольной области, во второй описаны некоторые усиления и обобщения полученных в первой части результатов.

Уточним, что целью настоящей работы является доказательство разрешимости изучаемых краевых задач в классах регулярных решений,т. е. решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

1. Разрешимость краевых задач для дифференциальных уравнений с кратными характеристиками в прямоугольной области

Обозначим через Ω интервал (0,1) оси Ox, через Q — прямоугольник $\Omega \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$. Пусть $c(x,t)$, $f(x,t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, m — фиксированное неотрицательное целое число.

Краевая задача I. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$\varphi(t)u_t + (-1)^m \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x,t)u = f(x,t) \tag{1.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.1}$$

$$D_x^k u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T), \quad k = 0, \dots, m, \tag{3.1}$$

$$D_x^k u(x,t)\big|_{x=1} = 0, \quad t \in (0,T), \quad k = 0, \dots, m-1. \tag{4.1}$$

Краевая задача II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1.1) и такую, что для нее выполняются условия (2.1) и (3.1), а также условия*

$$D_x^k u(x,t)\big|_{x=1} = 0, \quad t \in (0,T), \quad k = m+1, \dots, 2m. \tag{5.1}$$

Краевая задача III. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$\varphi(t)u_{tt} + (-1)^{m+1}\psi(t)D_x^{2m+1}u + c(x,t)u = f(x,t) \tag{6.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.1)–(4.1), а также условие

$$u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{7.1}$$

Краевая задача IV. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (6.1) и такую, что для нее выполняются условия (2.1), (3.1), (5.1) и (7.1).*

Ниже в работе будут использоваться анизотропные пространства Соболева $W_2^{k,l}(Q)$ (k, l — натуральные числа). Определения этих пространств можно найти в [12, 15, 16].

Теорема 1.1. *Пусть выполняются условия*

$$\varphi(t) \in C([0,T]), \quad \varphi(t) > 0 \text{ при } t \in [0,T], \quad \varphi(0) = 0; \tag{8.1}$$

$$\psi(t) \in C([0,T]), \quad \psi(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0,T]; \tag{9.1}$$

$$[\varphi(t)]^{-1}\psi(t) \in L_2([0,T]); \tag{10.1}$$

$$c(x,t) \equiv c(t), \quad c(t) \in C([0,T]), \quad c(t) \geq 0 \text{ при } t \in [0,T]; \tag{11.1}$$

$$c(t) = c_1(t) + c_2(t), \quad [\varphi(t)]^{-1}c_1(t) \in L_2([0,T]), \quad t^{\frac{1}{2}}[\varphi(t)]^{-1}c_2(t) \in L_2([0,T]),$$
$$\|t^{\frac{1}{2}}[\varphi(t)]^{-1}c_2(t)\|_{L_2([0,T])} < 1. \tag{12.1}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что

$$[\varphi(t)]^{-1}D_x^k f(x,t) \in L_2(Q),\ k = 0, \dots, 2m+1,$$

$$D_x^k f(x,t) = 0 \quad \text{при } x = 0,\ t \in (0,T),\ k = 0, \dots, m,$$

$$D_x^k f(x,t) = 0 \quad \text{при } x = 1,\ t \in (0,T),\ k = 0, \dots, m-1,$$

краевая задача I *имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^{2m+1,1}(Q)$.*

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации. Пусть $\{\varepsilon_l\}_{l=1}^{\infty}$ — последовательность положительных чисел, монотонно сходящаяся к нулю, $\varphi_l(t)$ — функция $\varphi(t) + \varepsilon_l$. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$\varphi_l(t)u_t + (-1)^m\psi(t)D_x^{2m+1}u + c(t)u - \varepsilon_l\varphi_l(t)D_x^{2(2m+1)}u = f(x,t) \tag{13.1}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.1)–(4.1), *а также условия*

$$D_x^k u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad t \in (0,T), \quad k = 2m+1,\ldots,3m, \tag{14.1}$$

$$D_x^k u(x,t)\big|_{x=1} = 0, \quad t \in (0,T), \quad k = 2m+1,\ldots,3m+1. \tag{15.1}$$

В этой задаче уравнение (13.1) представляет собой параболическое уравнение без вырождения, краевые условия (3.1), (4.1), (14.1) и (15.1) дают самосопряженную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$v^{(4m+2)}(x) = F(x).$$

Следовательно, существует функция $u_l(x,t)$, принадлежащая $W_2^{2(2m+1),1}(Q)$, являющаяся в прямоугольнике Q решением уравнения (13.1) и такая, что для нее выполняются условия (2.1) — (4.1), (14.1) и (15.1) (см. [17]). Покажем, что для семейства $\{u_l(x,t)\}_{l=1}^{\infty}$ имеют место условия, необходимые для осуществления в уравнении (13.1) предельного перехода при $l \to \infty$.

Умножим уравнение (13.1) на функцию $-[\varphi_l(t)]^{-1} D_x^{2(2m+1)} u_l(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $(0,1)\times(0,t^*)$, $0 < t^* \leq T$. После несложных преобразований с использованием условий (8.1)–(11.1), а также условий на функцию $f(x,t)$, нетрудно получить первую априорную оценку

$$\int\limits_\Omega \big[D_x^{2m+1} u_l(x,t^*)\big]^2\,dx + \varepsilon_l \int\limits_0^{t^*}\int\limits_\Omega \big[D_x^{2(2m+1)} u_l(x,t)\big]^2\,dxdt \leq N_1, \tag{16.1}$$

постоянная N_1 в которой определяется функциями $f(x,t)$ и $\varphi(t)$, а также числом T.

На следующем шаге умножим уравнение (13.1) на функцию $[\varphi_l(t)]^{-1} u_{lt}(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q. Получим равенство

$$\int\limits_Q u_{lt}^2\,dxdt = (-1)^{m+1}\int\limits_Q \frac{\psi(t)}{\varphi_l(t)} D_x^{2m+1} u_l u_{lt}\,dxdt + \frac{\varepsilon_l}{2}\int\limits_\Omega \big[D_x^{2m+1} u_l(x,T)\big]^2\,dx$$
$$-\int\limits_Q \frac{c_1(t)}{\varphi_l(t)} u u_t\,dxdt - \int\limits_Q \frac{c_2(t)}{\varphi_l(t)} u u_t\,dxdt + \int\limits_Q \frac{f(x,t)}{\varphi_l(t)} u_t\,dxdt. \tag{17.1}$$

В этом равенстве первое, второе, третье и пятое слагаемые правой части оцениваются с помощью неравенства Юнга и неравенства (16.1) величиной

$$\delta \int\limits_Q u_{lt}^2\,dxdt + C(\delta)$$

с произвольным положительным числом δ и числом $C(\delta)$, определяющимся также функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(x,t)$, $c_1(t)$ и числом T. Далее, для четвертого слагаемого имеем

$$\left|\int\limits_Q \frac{c_2(t)u_l u_{lt}}{\varphi_l(t)}\,dxdt\right| \le \left(\int\limits_Q u_{lt}^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^T \frac{c_2^2(t)}{\varphi_l^2(t)}\left(\int\limits_\Omega u_l^2\,dx\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left(\int\limits_Q u_{lt}^2\,dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^T \frac{tc_2^2(t)}{\varphi_l^2(t)}\left(\int\limits_0^t\int\limits_\Omega u_{l\tau}^2\,dxd\tau\right)dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \int\limits_Q u_{lt}^2\,dxdt\left(\int\limits_0^T \frac{tc_2^2(t)}{\varphi_l^2(t)}dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая условие (12.1) и подбирая число δ малым, получим, что следствием равенства (17.1) будет вторая априорная оценка

$$\int\limits_Q u_{lt}^2\,dxdt \le N_2, \tag{18.1}$$

постоянная N_2 в которой определяется функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(x,t)$, $c(t)$ и числом T.

Оценок (16.1) и (18.1) вполне достаточно для доказательства разрешимости краевой задачи I. Действительно, из этих оценок и из свойства рефлексивности гильбертова пространства [18] следует, что существуют последовательность $\{u_{l_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ решений задач (13.1), (2.1)–(4.1), (14.1), (15.1), а также функция $u(x,t)$ такие, что имеют место сходимости

$$u_{l_k}(x,t) \underset{k\to\infty}{\to} u(x,t) \quad \text{слабо в пространстве } W_2^{2m+1,1}(Q),$$

$$\varepsilon_{l_k}\varphi_{l_k}(t)D_x^{2(2m+1)}u_{l_k}(x,t) \to 0 \quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Очевидно, что предельная функция $u(x,t)$ принадлежит $W_2^{2m+1,1}(Q)$ и для нее выполняются уравнение (1.1) и краевые условия (2.1)–(4.1).

Теорема доказана.

Положим

$$V_1 = \left\{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty\left(0,T,W_2^{2m+1}(\Omega)\right), v_t(x,t) \in L_2(Q)\right\}.$$

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия* (8.1)–(10.1)*, а также условие*

$$c(x,t) \equiv c(t),\ c(t) \in C([0,T]),\ c(t) \ge 0 \text{ при } t \in [0,T], \quad t^{\frac{1}{2}}[\varphi(t)]^{-1}c(t) \in L_2([0,T]). \tag{19.1}$$

Тогда краевая задача I *не может иметь в пространстве* V_1 *более одного решения.*

Доказательство. Пусть $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ — два решения из пространства V_1 краевой задачи I. Обозначим $w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Заметим, что вследствие принадлежности функций $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ пространству V_1, а также вследствие условий (10.1) и (19.1) имеют место включения

$$[\varphi(t)]^{-1}\psi(t)w(x,t)\in L_2(Q),\quad [\varphi(t)]^{-1}c(t)w(x,t)\in L_2(Q).$$

Отсюда следует, что для функции $w(x,t)$ выполняется уравнение

$$w_t+(-1)^m[\varphi(t)]^{-1}\psi(t)D_x^{2m+1}w+[\varphi(t)]^{-1}c(t)w=0.$$

Умножим это уравнение на функцию $w(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику $(0,1)\times(0,t^*)$. Используя условия теоремы, получим, что имеет место неравенство

$$\int\limits_\Omega w^2(x,t^*)\,dx\le 0.$$

Вследствие произвольности числа t^* получим $w(x,t)\equiv 0$ в Q. А это и означает, что краевая задача I не может иметь в пространстве V_1 более одного решения.

Теорема доказана.

Для краевой задачи II имеют место результаты, вполне аналогичные представленным выше.

Теорема 3.1. *Пусть выполняются условия* (8.1)–(12.1). *Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что*

$$[\varphi(t)]^{-1}D_x^kf(x,t)\in L_2(Q),\quad k=0,\dots,2m+1,$$

$$D_x^kf(x,t)=0\quad]text\text{при}x=0,\ t\in(0,T),\ k=0,\dots,m,$$

$$D_x^kf(x,t)=0\quad \textit{при}\ x=1,\ t\in(0,T),\ k=m+1,\dots,2m,$$

краевая задача II имеет решение, принадлежащее пространству $W_2^{2m+1,1}(Q)$.

Теорема 4.1. *Пусть выполняются условия* (8.1)–(10.1), (19.1). *Тогда краевая задача* II *не может иметь в пространстве V_1 более одного решения.*

Доказательство теорем 3.1 и 4.1 проводится вполне аналогично доказательству теорем 1.1 и 1.2. Уточним лишь, что при доказательстве теоремы 3.1 вновь используется дифференциальное уравнение (13.1), но при этом вместо условия (15.1) во вспомогательной регуляризованной задаче используется условие

$$D_x^ku(x,t)\big|_{x=1}=0,\quad t\in(0,T),\quad k=3m+1,\dots,4m+1. \tag{20.1}$$

Перейдем к исследованию разрешимости краевых задач III и IV.

Теорема 5.1. *Пусть выполняются условия* (8.1) *и* (9.1), *а также условия*

$$t^{\frac12}[\varphi(t)]^{-1}\psi(t)\in L_2([0,T]); \tag{21.1}$$

$$c(x,t)\equiv c(t),\ c(t)\in C([0,T]),\ c(t)\ge 0\ \textit{при}\ t\in[0,T],\quad t^{\frac12}[\varphi(t)]^{-1}c(t)\in L_2([0,T]). \tag{22.1}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что

$$[\varphi(t)]^{-1} D_x^k f(x,t) \in L_2(Q), \quad k = 0, \dots, 2m+1,$$

$$D_x^k f(x,t) = 0 \quad \textit{при } x = 0,\ t \in (0,T),\ k = 0, \dots, m,$$

$$D_x^k f(x,t) = 0 \quad \textit{при } x = 1,\ t \in (0,T),\ k = 0, \dots, m-1,$$

краевая задача III *имеет решение, принадлежащее пространству* $W_2^{2m+1,2}(Q)$.

Доказательство. Вновь воспользуемся методом регуляризации. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$\varphi_l(t) u_{tt} + (-1)^{m+1} \psi(t) D_x^{2m+1} u + c(x,t) u + \varepsilon_l \varphi_l(t) D_x^{2(2m+1)} u = f(x,t) \qquad (23.1)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.1)–(4.1), (7.1), (14.1) *и* (15.1). Данная задача имеет решение $u_l(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2(2m+1),2}(Q)$ (см. [17]). Покажем, что для семейства $\{u_l(x,t)\}_{l=1}^{\infty}$ имеют место равномерные по l априорные оценки.

Умножим уравнение (23.1) на функцию $[\varphi_l(t)]^{-1} D_x^{2(2m+1)} u_l(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q. После несложных преобразований с использованием условий (8.1), (9.1) и (22.1) получим, что имеет место первая априорная оценка

$$\int_Q \left[D_x^{2m+1} u_{lt}\right]^2 dxdt + \varepsilon_l \int_Q \left[D_x^{2(2m+1)} u_l\right]^2 dxdt \le N_3 \qquad (24.1)$$

с постоянной N_3, определяющейся лишь функциями $f(x,t)$ и $\varphi(t)$.

На следующем шаге умножим уравнение (23.1) на функцию $[\varphi_l(t)]^{-1} u_{ltt}(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q. Получим равенство

$$\int_Q u_{ltt}^2\, dxdt + \varepsilon_l \int_Q \left[D_x^{2m+1} u_{lt}\right]^2 dxdt = (-1)^m \int_Q \frac{\psi(t)}{\varphi_l(t)} D_x^{2m+1} u_l u_{ltt}\, dxdt$$
$$- \int_Q \frac{c(t)}{\varphi_l(t)} u_l u_{ltt}\, dxdt + \int_Q \frac{f(x,t)}{\varphi_l(t)} u_{ltt}\, dxdt = I_1 + I_2 + I_3. \qquad (25.1)$$

Для интеграла I_1 имеют место неравенства

$$|I_1| \le \frac{\delta^2}{2} \int_Q u_{ltt}^2\, dxdt + \frac{1}{2\delta^2} \int_Q \frac{\psi^2(t)}{\varphi_l^2(t)} \left(D_x^{2m+1} u_l\right)^2 dxdt$$
$$\le \frac{\delta^2}{2} \int_Q u_{ltt}^2\, dxdt + \frac{1}{2\delta^2} \int_0^T \frac{t\psi^2(t)}{\varphi_l^2(t)} \left(\int_0^t \int_\Omega \left(D_x^{2m+1} u_{l\tau}\right)^2 dxd\tau \right) dt$$
$$\le \frac{\delta^2}{2} \int_Q u_{ltt}^2\, dxdt + \frac{N_3}{2\delta^2} \int_0^T \frac{t\psi^2(t)}{\varphi_l^2(t)}\, dt$$

(здесь δ — произвольное положительное число). Аналогичные неравенства имеют место и для интеграла I_2, интеграл же I_3 просто оценивается сверху с помощью неравенства Юнга величиной

$$\frac{\delta^2}{2}\int\limits_Q u_{ltt}^2\,dxdt+\frac{1}{2\delta^2}\int\limits_Q \frac{f^2}{\varphi_l^2(t)}\,dxdt.$$

Подбирая число δ малым, получим, что следствием равенства (25.1) будет априорная оценка

$$\int\limits_Q u_{ltt}^2\,dxdt\le N_4, \tag{26.1}$$

постоянная N_4 в которой определяется функциями $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $f(x,t)$ и $c(t)$.

Оценок (24.1) и (26.1) достаточно для доказательства теоремы. Действительно, из оценок (24.1) и (26.1) следует, что существует последовательность $\{u_{l_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$, слабо сходящаяся в пространстве $W_2^{2m+1,2}(Q)$ и такая, что

$$\varepsilon_{l_k}\varphi_{l_k}(t)D_x^{2(2m+1)}u_{l_k}(x,t)\to 0\quad \text{слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Предельная функция $u(x,t)$ и будет требуемым решением краевой задачи III.

Определим пространство V_2:

$$V_2=\big\{v(x,t): v(x,t)\in L_2\big(0,T,W_2^{2m+1}(\Omega)\big),\\ v_t(x,t)\in L_2\big(0,T,W_2^{2m+1}(\Omega)\big),\ v_{tt}(x,t)\in L_2(Q)\big\}.$$

Теорема 6.1. *Пусть выполняются условия* (8.1), (9.1), (21.1), (22.1). *Тогда краевая задача* III *не может иметь в пространстве* V_2 *более одного решения.*

Доказательство. Для разности $w(x,t)$ двух возможных решений краевой задачи III имеют место включения

$$[\varphi(t)]^{-1}\psi(t)D_x^{2m+1}w(x,t)\in L_2(Q),\quad [\varphi(t)]^{-1}c(t)w(x,t)\in L_2(Q).$$

Отсюда следует, что имеет место равенство

$$w_{tt}+(-1)^{m+1}[\varphi(t)]^{-1}\psi(t)D_x^{2m+1}w+[\varphi(t)]^{-1}c(t)w=0.$$

Умножая это равенство на функцию $w(x,t)$ и интегрируя по прямоугольнику Q, используя далее условия теоремы, получим, что $w(x,t)$ — тождественно нулевая в Q функция. А это и означает, что краевая задача III не может иметь в пространстве V_2 более одного решения.

Теорема доказана.

Для краевой задачи IV имеют место аналогичные теоремам 5.1 и 6.1 теоремы существования и единственности. Уточним лишь, что краевая задача IV будет разрешима в пространстве $W_2^{2m+1,2}(Q)$ при выполнении условий (8.1), (9.1), (21.1), (22.1) для функций $f(x,t)$, для которых выполняются условия теоремы 3.1.

2. Замечания и дополнения

В настоящем разделе описаны некоторые усиления и обобщения представленных выше результатов.

1.2. Прежде всего заметим, что условиями теорем 1.1–6.1 допускается обращение функции $\psi(t)$ в нуль в произвольных точках отрезка $[0, T]$. Если же функция $\varphi(t)$ обращается в нуль в каких-либо точках, отличных от точки $t = 0$, то и в этом случае с помощью используемой в п. 1 техники также нетрудно будет определить необходимые условия и получить теоремы существования и единственности решений.

2.2. Уточним, что все представленные в п. 1 (с учетом замечания 1.2) результаты о разрешимости краевых задач I и II новые по сравнению с результатами из [14].

3.2. Приведем еще один пример задачи, разрешимость которой нетрудно будет установить с помощью техники, представленной в п. 1. Ограничимся уравнением (1.1) в случае $m = 1$.

Краевая задача. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$\varphi(t)u_t - \psi(t)D_x^3 u + c(t)u = f(x,t) \tag{1.2}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$u_x(0,t) = u_{xx}(0,t) = 0, \quad 0 < t < T, \tag{3.2}$$

$$u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T. \tag{4.2}$$

Для доказательства разрешимости этой задачи воспользуемся вновь методом регуляризации. Именно, рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$\varphi_l(t)u_t - \psi(t)D_x^3 u + c(t)u - \varepsilon_l \varphi_l(t) D_x^6 u = f(x,t)$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.2)–(4.2), *а также условия*

$$D_x^5 u(x,t)\big|_{x=0} = 0, \quad D_x^3 u(x,t)\big|_{x=1} = D_x^4 u(x,t)\big|_{x=1} = 0, \quad 0 < t < T.$$

Эта задача имеет решение $u_l(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{6,1}(Q)$. Далее, для семейства $\{u_l(x,t)\}_{l=1}^{\infty}$ справедливы оценки (16.1) и (18.1). Этих оценок вполне достаточно для выбора подпоследовательности, сходящейся к регулярному решению краевой задачи (1.2)–(4.2).

Для уравнения (6.1) в случае $m = 1$ также нетрудно, используя регуляризацию и априорные оценки, получить существование регулярных решений краевой задачи с граничными условиями (3.2) и (4.2).

4.2. Коэффициенты уравнений (1.1) и (6.1) вполне могут зависеть и от переменной x. Количество условий и выкладок при зависимости коэффициентов от x существенно увеличится, суть же теорем существования и единственности – нет.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джураев Т. Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Ташкент: Фан, 1986.

2. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гибсон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые явления. М.: Мир, 1988.

3. *Бубнов Б. А.* Общие краевые задачи для уравнения Кортевега — де Фриза в ограниченной области // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 1. С. 26–31.

4. *Хаблов В. В.* О некоторых корректных постановках граничных задач для уравнения Кортевега — де Фриза. Препринт. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1979.

5. *Абдиназаров С.* Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, № 1. С. 1–12.

6. *Konig C. E., Ponce G., Vega L.* Well-posedness of the initial value problem for Korteweg–de Vries equation // J. Amer. Math. Soc. 1991. V. 4. P. 323–347.

7. *Кожанов А. И.* О разрешимости нелокальной по времени задачи для одного уравнения с кратными характеристиками // Мат. заметки ЯГУ. 2001. Т. 8, вып. 2. С. 27–40.

8. *Larkin N. A.* Korteweg–de Vries and Kuramoto–Sivashinsky equations in bounded domains // J. Math. Anal. Appl. 2004. V. 297, N 2. P. 169–185.

9. *Faminski A. V., Larkin N. A.* Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed in bounded interval // Electron. J. Differ. Equ. 2010. V. 2010, N 1. P. 1–20.

10. *Larkin N. A., Luchesi J.* General mixed problems for the KDV equations on bounded intervals // Electron. J. Differ. Equ. 2010. V. 2010, N 168. P. 1–17.

11. *Лукина Г. А.* Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега — де Фриза // Вестн. Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. 2011. Вып. 8, № 17. С. 53–62.

12. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск: Вычисл. центр СО РАН, 1995.

13. *Кожанов А. И., Лукина Г. А.* Нелокальные краевые задачи с частично интегральными условиями для вырождающихся дифференциальных уравнений с кратными характеристиками // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2017. Т. 17, № 3. С. 37–52.

14. *Кожанов А. И., Зикиров О. С.* Краевые задачи для дважды вырождающегося дифференциального уравнения с кратными характеристиками // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т. 25, № 4. С. 34–44.

15. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

16. *Triebel H.* Interpolation theory. Functional spaces. Differetial operators. Berlin: VEB Deutscher Verl. Wiss., 1978.

17. *Якубов С. Я.* Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения. Баку: Элм, 1985.

18. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 19 мая 2021 г.
После доработки 19 мая 2021 г.
Принята к публикации 26 августа 2021 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Академия наук Республики Саха (Якутия),
ул. Ленина, 33, Якутск 677007, Россия
kozhanov@math.nsc.ru

Лукина Галина Александровна
Политехнический институт (филиал) ФГАОУ ВО
«Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова» в г. Мирном,
ул. Тихонова, 5/1, Мирный 678175, Республика Саха (Якутия), Россия
lukina-g@mail.ru

UDC 517.946

DEGENERATION IN DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS

A. I. Kozhanov and G. A. Lukina

Abstract: We study the solvability of boundary value problems for the differential equations

$$\varphi(t)u_t + (-1)^m\psi(t)D_x^{2m+1}u + c(x,t)u = f(x,t),$$

$$\varphi(t)u_{tt} + (-1)^{m+1}\psi(t)D_x^{2m+1}u + c(x,t)u = f(x,t),$$

where $x \in (0,1)$, $t \in (0,T)$, m is a non-negative integer, $D_x^k = \frac{\partial^k}{\partial x^k}$ $(D_x^1 = D_x)$, while the functions $\varphi(t)$ and $\psi(t)$ are non-negative and vanish at some points of the segment $[0,T]$. We prove the existence and uniqueness theorems for the regular solutions, those having all generalized Sobolev derivatives required in the equation, in the inner subdomains.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.91.97.002

Keywords: differential equations with multiple characteristics, degeneration, boundary value problem, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. *Dzhuraev T. D.*, Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite Types [in Russian], FAN, Tashkent (1986).
2. *Dodd R. K., Eilbeck J. C., Gibbon J. D., and Morris H. C.*, Solitons and Nonlinear Wave Equations, Acad. Press, London (1982).
3. *Bubnov B. A.*, “Generalized boundary value problems for the Korteweg–de Vries equation in bounded domain,” Differ. Equ., **15**, 17–21 (1979).
4. *Khablov V. V.*, “On some well-posed statements of boundary-value problems for the Korteweg–de Vries equation [in Russian],” Preprint, IM SO AN SSSR, Novosibirsk (1979).
5. *Abdinazarov S.*, “General boundary value problems for an equation of third order with multiple characteristics,” Differ. Equ., **17**, 3–12 (1981).
6. *Konig C. E., Ponce G., and Vega L.*, “Well-posedness of the initial value problem for Kortweg–de Vries equation,” J. Amer. Math. Soc., **4**, 323–347 (1991).
7. *Kozhanov A. I.*, “On the solvability of a nonlocal time problem for an equation with multiple characteristics [in Russian],” Mat. Zamet. YAGU, **8**, No. 2, 27–40 (2001).
8. *Larkin N. A.*, “Kortweg–de Vries and Kuramoto–Sivashinsky equatuion in bounded domains,” J. Math. Anal. Appl., **297**, No. 2, 169–185 (2004).
9. *Faminski A. V. and Larkin N. A.*, “Initial-boundary value problems for quasilinear dispersive equations posed in bounded interval,” Electron. J. Differ. Equ., **2010**, No. 1, 1–20 (2010).
10. *Larkin N. A. and Luchesi J.*, “ General mixed problems for the KDV equations on bounded intervals,” Electron. J. Differ. Equ., **2010**, No. 168, 1–17 (2010).
11. *Lukina G. A.*, “Boundary value problems with integral conditions for the linearized Korteweg–de Vries equation [in Russian],” Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Univ., Ser. Mat. Model. Program., **17**, No. 8, 53–62 (2011).
12. *Egorov I. E. and Fedorov V. E.*, High-Order Non-Classical Equations of Mathematical Physics [in Russian], Vychisl. Tsentr SO RAN, Novosibirsk (1995).

13. *Kozhanov A. I. and Lukina G. A.*, “Nonlocal boundary-value problems with partially integral conditions for degenerate differential equations with multiple characteristics,” J. Math. Sci., **237**, No. 4, 549–562 (2019).

14. *Kozhanov A. I. and Zikirov O. S.*, “Boundary value problems for twice degenerate differential equations with multiple characteristics [in Russian],” Mat. Zamet. SVFU, **25**, No. 4, 34–44 (2018).

15. *Ladyzhenskaya O. A., Solonnikov V. A., and Uraltseva N. N.*, Linear and Quasilinear Parabolic Equations [in Russian], Nauka, Moscow (1967).

16. *Triebel H.*, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, VEB Deutscher Verl. Wiss., Berlin (1978).

17. *Jakubov S. Ya.*, Linear Differential-Operator Equations and Their Applications [in Russian], Elm, Baku (1985).

18. *Trenogin V. A.* Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).

Submitted May 19, 2021
Revised May 19, 2021
Accepted August 26, 2021

Aleksandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Academy of Science of the Republic of Sakha (Yakutia),
33 Lenin Avenue, Yakutsk 677007, Russia
kozhanov@math.nsc.ru

Galina A. Lukina
Ammosov North-Eastern Federal University,
Mirny Polytechnic Institute,
5/1 Tikhonov Street, Mirny 678175, Russia
lukina-g@mail.ru