Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

УДК 517.957+517.518.22

О ТЕОРЕМАХ КОМПАКТНОСТИ, СВЯЗАННЫХ С ЗАДАЧАМИ С НЕИЗВЕСТНОЙ ГРАНИЦЕЙ

А. Г. Подгаев

Аннотация. Доказывается часть результатов, относящихся к исследованию задач с неизвестной границей методами компактности, которые были представлены на IX Международной конференции по математическому моделированию, посвященной 75-летию В. Н. Врагова. Дано обоснование теоремы об относительной компактности, которую можно применять при исследовании задач типа задачи Стефана с неизвестной частью границы, а также в задачах для уравнений переменного типа с неизвестной границей смены типа. Приведен пример такой задачи и показано, что полученные оценки на приближенные решения уравнения и функции, описывающие последовательность границ, приближающуюся к искомой границе фазового перехода, полностью совпадают с условиями, сформулированными в основной теореме о компактности.

Автору не известны теоремы подобного типа. Теорема является новым видом теорем компактности, приспособленным к задачам типа Стефана.

Для лучшего восприятия приведены наиболее простые условия при которых справедлив результат, совпадающие с условиями рассмотренного примера. Однако результат может быть обобщен на значительно более общие ситуации, такие как число границ фазового перехода и замену оценки второй производной оценкой более сложного агрегата, встречающегося в уравнениях с вырождениями на решениях.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.37.71.006

Ключевые слова: относительная компактность, нецилиндрическая область, неизвестная граница, условие Стефана.

Введение

Необходимость обоснования предложенных в работе результатов вызвана одним из разрабатываемых автором методов исследования задач с неизвестной границей. В параболических уравнениях к таким задачам можно отнести задачи типа Стефана, а также некоторые задачи для уравнений переменного типа, в которых граница смены типа (смены направления параболичности) также определяется вместе с решением. В этих задачах неизвестная граница (называемая свободной) находится по дополнительному условию на этой границе.

Некоторые результаты и обзоры по современному состоянию первого типа задач изложены в [1–8]. Имеются также классические работы А. Фридмана, Л. Рубинштейна, А. М. Мейрманова.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ, Хабаровского отделения регионального научно-образовательного математического центра «Дальневосточный центр математических исследований» (дополнительное соглашение № 075–02–2020–1529/1 от 21 апреля 2020 г.).

Последние публикации по задачам для уравнений переменного типа с неизвестными границами смены типа в основном относятся к случаю, когда на свободной границе явно дополнительные условия не рассматриваются [9–14]. Но и к этим задачам можно применить построенный в этой работе алгоритм.

Рассматривая нестационарные задачи в естественной физической меняющейся со временем пространственной области и получив соотношение между искомым решением и функцией, описывающей неизвестную границу, мы строим итерационный процесс. На одном из шагов процесса необходимо по заданной криволинейной границе (и тем самым в нецилиндрической области переменных (x,t)) определить решение краевой задачи. А после его нахождения определить следующую криволинейную границу. При этом для рассматриваемой здесь задачи, одновременно определяем и приближение к одному из постоянных коэффициентов задачи.

Один из шагов процесса требует развития методов исследования нестационарных задач в нецилиндрической области. Этот вопрос решался в ряде старых исследований, но интерес к нему в связи с новыми идеями и целями возникает и сейчас постоянно. В частности, этому посвящены некоторые работы автора.

Следующий шаг, когда получена последовательность решений, каждое из которых определено в своей области, требует обоснования возможности предельного перехода. Оставаясь в физической области решения, для этого желательно иметь некоторые теоремы компактности. Главной целью работы и является получение результата такого типа. Используя монотонность элементов последовательности границ, можно построить монотонную (по t) «шкалу» пространств (функций от пространственной переменной). И тогда на полученные здесь результаты для случая нецилиндрических областей можно смотреть как на теоремы (относительной) компактности некоторых множеств абстрактных функций со значениями в «шкале» банаховых пространств. Поэтому идейно результаты опираются на методику, приведенную в [15]. Для случая цилиндрических областей и анизотропных пространств (типа $L_p(0,T;B)$) такие теоремы имеются, например, в [16, 17].

Другой, наиболее распространенный, подход (см., например, работы А. М. Мейрманова) к исследованию задач с неизвестной границей состоит в том, чтобы, используя растяжение переменных, задачу в неизвестной области свести к начально-краевой задаче для параболического уравнения в известной цилиндрической области, но с неизвестными коэффициентами в уравнении. Эти коэффициенты находятся по дополнительному краевому условию. Чтобы их найти, необходимо построить некоторый нелинейный оператор, неподвижные точки которого определяют решение исходной задачи. Этот подход, как правило, приводит к некоторым требованиям малости (обычно промежутка времени) и более жестким требованиям (по сравнению с предлагаемым в работе) на гладкость искомой границы.

Еще один подход, основанный на введенном С. Л. Каменомостской и О. А. Олейник понятии обобщенного решения задачи Стефана оказался эффективным при рассмотрении многомерных задач. Дюво предложил способ сведения этой задачи к вариационному неравенству. Однако оба эти подхода, обладая большой общностью, теряют значительную часть полученной информации: не остается никакой информации о структуре раздела фаз, о принадлежности неизвестной границы какому-либо классу и о том, в каком смысле удовлетворяется условие Стефана. Предлагаемый в работе подход гарантирует принадлежность границы классу типа W_p^1, а также в явном виде может дать информацию о границе фазового перехода, например, с использовнаием численных расчетов.

Перед формулировкой и обосновыванием основной теоремы будет разобран конкретный пример задачи, выведен итерационный процесс, показано, что для нее можно получить именно те оценки, которые будут использованы в теореме компактности.

Однако рассматриваемая в примере задача отличается от стандартной задачи Стефана. В работе рассматривается однофазная задача с расширением жидкой фазы в среду с постоянной температурой, равной температуре плавления ($=0$), в которой считается заданной величина растаявшего вещества за данный промежуток времени. Неизвестными в этой задаче, как и в задаче Стефана, являются, температура в каждой точке в каждый момент времени, а также граница перехода твердой фазы в жидкую. Но, в отличие от задачи Стефана, скрытая удельная теплота плавления также подлежит определению.

1. Пример получения необходимых оценок и вывода итерационного процесса

Трехмерная задача с неизвестной границей для нелинейного уравнения теплопроводности
$$c_t = \varphi(c)\Delta c = \mathrm{div}(\varphi(c)\nabla c) - \varphi'(c)|\nabla c|^2$$
(чаще записывают уравнение в виде $\frac{1}{\varphi(c)}c_t = \Delta c$) в шаровом слое $1 < |x| < r(t)$, где $r(t)$ — неизвестная функция, подлежащая определению вместе с решением $c(x,t)$ уравнения, при предположении центральной симметричности начальной функции может быть сведена (заменой $c(x,t) = u(r,t)$, где r — евклидово расстояние от x до начала координат) к следующей задаче ($\Phi(u) = \int\limits_0^u \varphi(\xi)d\xi$):

$$u_t = (\Phi(u))''_{rr} - \varphi'(u)(u'_r)^2 + \frac{2}{r}\varphi(u)u'_r, \quad 1 < r < r(t),\ t \in (0,T), \tag{1}$$

$$u(r,0) = u_0(r), \quad 1 \le r \le 2, \tag{2}$$

$$(\Phi(u))'_r = 0 \quad \text{при } r = 1,\ t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u = 0 \quad \text{при } r = r(t),\ t \in (0,T), \tag{4}$$

$$(\Phi(u))'_r = -Lr'(t) \quad \text{при } r = r(t),\ t \in (0,T). \tag{5}$$

Предполагаем, что функция $\varphi'(\xi)$ непрерывна для всех ξ, а также что

$$\varphi(\xi) \ge \delta > 0, \quad \xi\varphi'(\xi) \ge 0. \tag{6}$$

Введем нецилиндрическую область $Q_t = \{(r,\tau) : 1 < r < r(\tau),\ \tau \in (0,t)\}$. При предположении, что $u_0(r) \geq 0$, $u_0(2) = 0$, $u_0 \in W_2^1$, будет видно, что $r(t)$ не убывает, что $r(t) \in W_2^1(0,T)$ и, следовательно, непрерывна по Гёльдеру.

Представляя интеграл по Q_t как

$$\int\limits_1^2 \int\limits_0^t d\tau dr + \int\limits_2^{r(t)} \int\limits_{\theta(r)}^t d\tau dr$$

и как

$$\int\limits_0^t \int\limits_1^2 dr d\tau + \int\limits_0^t \int\limits_2^{r(t)} dr d\tau$$

(где $t = \theta(r)$ — уравнение неизвестной границы) и интегрируя по Q_t уравнение (1) с условиями (2)–(5), выведем важное для дальнейшего интегральное соотношение

$$L(r(t)-2) = \int\limits_1^2 u_0(r)\,dr - \int\limits_1^{r(t)} u(r,t)\,dr + \int\limits_0^t \int\limits_1^{r(\tau)} \left(\frac{2}{r}\varphi(u)u' - \varphi'(u)u'^2\right) dr d\tau. \quad (7)$$

Однако можно и непосредственно проверить, что задачи (1)–(5) и (1)–(4), (7) эквивалентны.

В отличие от задачи Стефана, в данной задаче мы считаем величину L — скрытую удельную теплоту плавления вещества, также подлежащей определению, поэтому дополнительно требуем, чтобы в заданный (конечный) момент времени $t = T$ объем растаявшей фазы достиг заданной величины. Это эквивалентно заданию величины $r(T)$. Поэтому далее считаем, что

$$r(T) = \ell, \quad \text{где } \ell > 2 \text{ — заданная постоянная.} \quad (8)$$

На основании соотношения (7) определим следующий итерационный процесс:

$$L_n(r^{n+1}(t)-2) = \int\limits_1^2 u_0(r)\,dr - \int\limits_1^{r^n(t)} u^n(r,t)\,dr + \int\limits_0^t \int\limits_1^{r^n(\tau)} \left(\frac{2}{r}\varphi(u^n)u_r^n - \varphi'(u^n)u_r^{n2}\right) dr d\tau \quad (9)$$

$$r^{n+1}(T) = \ell, \quad r^0(t) = \frac{\ell-2}{T}t + 2, \quad n = 0,1,2,3,\ldots.$$

Функция $u^n(r,t)$ строится по $r^n(t)$ как решение следующей краевой задачи в заданной нецилиндрической области $Q_T^n = \{(r,\tau) : 1 < r < r^n(t),\ \tau \in (0,T)\}$:

$$u_t^n = (\Phi(u^n))''_{rr} - \varphi'(u^n)(u_r^n)^2 + \frac{2}{r}\varphi(u^n)u_r^n, \quad 1 < r < r^n(t),\ t \in (0,T), \quad (10)$$

$$u^n(r,0)=u_0(r),\quad 1\le r\le 2,\ u_0\ge 0,$$

$$(\Phi(u^n))'_r=0\quad\text{при}\ \ r=1,\ t\in(0,T),$$

$$u^n=0\quad\text{при}\ \ r=r^n(t),\ t\in(0,T)$$

по известной правой границе такой, что для всех n

$$r^n(t)\in W_2^1(0,T),\quad \frac{d}{dt}r^n(t)\ge 0,\quad r^n(0)=2,\quad r^n(T)=\ell,$$

а L^n определяется после этого из (9), исходя из требования $r^{n+1}(T)=\ell$ для всех $n=0,1,2,\dots$, т. е.

$$L_n(\ell-2)=\int\limits_1^2 u_0(r)\,dr-\int\limits_1^\ell u^n(r,T)\,dr+\int\limits_0^T\int\limits_1^{r^n(\tau)}\left(\frac{2}{r}\varphi(u^n)u_r^n-\varphi'(u^n)u_r^{n2}\right)drd\tau. \tag{11}$$

Если $L_n=0$, то полагаем, например, $r^{n+1}(t)=r^0(t)$.

В случае решения обычной задачи Стефана с заданной L, которую мы здесь, однако, не рассматриваем, r^{n+1} находится из (9) при $L_n=L$.

Покажем, как для случая нецилиндрической области получаются оценки производных по r.

Опуская в задаче (10) на время индексы n сверху, будем искать приближенное решение задачи (10) в виде

$$u_m=\sum_{k=0}^m c_k^m(t)\omega_k(r,t),\quad \text{где}\ \omega_k(r,t)=\sqrt{2}\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\frac{r-1}{r(t)-1}\right],$$

исходя из требований

$$\int\limits_1^{r(t)} u_{mt}(r,t)\omega_j(r,t)\,dr+\int\limits_1^{r(t)}(\Phi(u_m))'\omega_{jr}(r,t)\,dr$$
$$+\int\limits_1^{r(t)}\varphi'(u_m)u_{mr}^2\omega_j(r,t)\,dr=2\int\limits_1^{r(t)}\frac{1}{r}\varphi(u_m)u_{mr}\omega_j(r,t)\,dr,\quad j=0,1,2,\dots,m, \tag{12}$$

$$u_m(r,0)=\sum_{k=1}^m c_k\omega_k(r,0),\quad c_k=\int\limits_1^2 u_0(r)\omega_k(r,0)\,dr.$$

Заметим, что для всех $t\in[0,T]$ система функций $\{\omega_k(r,t)\}_{k=1}^\infty$ ортогональная и полная как в пространстве $L_2(1,r(t))$, так и в пространстве функций из $W_2^1(1,r(t))$, равных нулю при $r=r(t)$. При этом

$$\int\limits_1^{r(t)}\omega_k(r,t)\omega_j(r,t)\,dr=\delta_k^j(r(t)-1).$$

Отсюда, в частности, следует, что для коэффициентов Фурье c_k функции $u_0(r) \in W_2^1(1,2)$ такой, что $u_0(2) = 0$, будем иметь

$$u_m(r,0) = \sum_{k=0}^{m} c_k \omega_k(r,0) \to u_0(r)$$

в $L_2(1,2)$ и в $W_2^1(1,2)$.

Важно заметить здесь, что

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{dc_k^m}{dt} \omega_k(r,t) + c_k^m(t) \frac{\partial \omega_k}{\partial t}(r,t) \right), \tag{$*$}$$

$$\frac{\partial \omega_k}{\partial t} = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right) \frac{r-1}{(r(t)-1)^2} r'(t) \sin \left[\left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right) \frac{r-1}{r(t)-1} \right]. \tag{$**$}$$

Это отличает проекционный метод данной работы от классического случая цилиндрических областей.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (12) эквивалентна нормальной форме

$$\sqrt{2}(r(t)-1) \frac{dc_j^m(t)}{dt} = -\sum_{k=0}^{m} c_k^m(t) \int_1^{r(t)} \omega'_{kt}(r,t) \omega_j(r,t)\, dr$$

$$-\int_1^{r(t)} \left[(\Phi(u_m))'_r \, \omega'_{jr}(r,t) + \varphi'(u_m) u_{mr}^2 \omega_j(r,t) \right] dr, \quad c_j^m(0) = c_j,\ j = 0,1,2,\dots,m.$$

Заметим, что в силу $(**)$ в правую часть этой системы входит $r'(t) \in L_2(0,T)$. Выполнение условия леммы Вишика — Дубинского, гарантирующего глобальную разрешимость задачи Коши, следует из полученной ниже оценки. Остальные условия для системы выполнены ($\varphi'(\xi)$ непрерывна), кроме линейной части, в которую входит $r'(t)$. Однако это не мешает гарантировать (одна из публикаций автора) существование глобального решения из класса $W_2^1(0,T)$ и в этом случае.

Стандартно из равенства (12) можно получить равенство

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_1^{r(t)} u_m^2\, dr + \int_1^{r(t)} \left[\varphi(u_m) + \varphi'(u_m) u_m \right] u_{mr}^2\, dr = 2 \int_1^{r(t)} \frac{1}{r} \varphi(u_m) u_m u_{mr}\, dr. \tag{13}$$

Преобразуем правую часть, вводя функцию

$$\varphi_1(\xi) = \int_0^{\xi} \varphi(\eta) \eta\, d\eta \ge \frac{\delta}{2} \xi^2,$$

а именно:

$$2 \int_1^{r(t)} \frac{1}{r} \varphi(u_m) u_m u_{mr}\, dr = 2 \int_1^{r(t)} \frac{\partial}{\partial r} (\varphi_1(u_m)) \frac{1}{r}\, dr = 2 \int_1^{r(t)} \frac{\varphi_1(u_m)}{r^2}\, dr - 2\varphi_1(u_m(1,t)).$$

Определив функцию

$$\psi(u)=\int\limits_0^u\sqrt{\varphi(\eta)+\eta\varphi'(\eta)}\,d\eta,$$

тождество (13) можно записать в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_1^{r(t)}u_m^2\,dr+\int\limits_1^{r(t)}\left|\frac{\partial\psi(u_m)}{\partial r}\right|^2dr+2\varphi_1(u_m(1,t))=2\int\limits_1^{r(t)}\frac{\varphi_1(u_m)}{r^2}\,dr. \tag{14}$$

Кроме условия (6) на функцию φ предполагается выполненным:

$$\forall u\in R\quad \varphi_1(u)\le c_1\psi^2(u)+c_2u^2+c_3,\ \text{где } 2c_1(\ell-1-\ln\ell)<1. \tag{15}$$

Также отметим, что для функций $u(r,t)$, равных нулю при $r=r(t)$, выполнено неравенство

$$|\psi(u)|^2\le(r(t)-r)\int\limits_1^{r(t)}\left|\frac{\partial}{\partial r}\psi(u)\right|^2dr. \tag{16}$$

Из (15), (16) вытекает

$$2\int\limits_1^{r(t)}\frac{\varphi_1(u_m)}{r^2}\,dr\le 2c_1\int\limits_1^{r(t)}\frac{r(t)-r}{r^2}\,dr\int\limits_1^{r(t)}\left|\frac{\partial}{\partial r}\psi(u_m)\right|^2dr+2c_2\int\limits_1^{r(t)}u_m^2\,dr+2c_3(\ell-1)$$
$$\le 2c_1(\ell-1-\ln\ell)\int\limits_1^{r(t)}\left|\frac{\partial}{\partial r}\psi(u_m)\right|^2dr+2c_2\int\limits_1^{r(t)}u_m^2\,dr+2c_3(\ell-1).$$

Здесь использован тот факт, что на каждом шаге $r(t)\le\ell$, и возрастание функции $r-1-\ln r$ при $r>1$. Из последней оценки, оценок (15), (16) и леммы Гронуолла получаем равномерную по m оценку

$$\int\limits_1^{r(t)}u_m^2\,dr+\int\limits_0^t\int\limits_1^{r(\tau)}\left|\frac{\partial}{\partial r}\psi(u_m)\right|^2drd\tau+\int\limits_0^t\varphi_1(u_m(1,\tau))\,d\tau\le c, \tag{17}$$

из (17) и (16) следует, что $\int\limits_0^t|\psi(u_m)|\,d\tau$ также равномерно ограничен.

Оценку (17) можно получить (при других предположениях) без условия связи φ и параметра ℓ. Действительно, предположим, что вместо (15) выполнено неравенство

$$\varphi_1(u)\le\overline{c_1}|\psi(u)|^{p_1}+\overline{c_2}u^2+\overline{c_3},\quad 1\le p_1<2. \tag{18}$$

Используя неравенство Коши с ε, оценивая первое слагаемое справа в (18) через $\varepsilon\psi^2(u)+c(\varepsilon)$, аналогично получим оценку (17). Условие (18) интересно тем, что оно выполнено, например, для важного случая степенной зависимости φ от u. Так, функция

$$\varphi(u) = \frac{1}{2s+1}\left(u^s + \frac{2s+1}{s+1}\right)^2 + \left(\frac{s}{s+1}\right)^2,$$

для которой $\varphi_1(u) = (u^s+1)^2$, s четное, удовлетворяет (18) с $p_1 = \frac{2s}{s+1}$ (и условию (6)).

Для получения второй группы оценок умножим левые и правые части равенств на $-\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\pi j}{r(t)-1}\right)^2 c_j^m(t)$ и просуммируем по j от 0 до m. После некоторых преобразований, используя равенства

$$u_m(r(t),t) = 0, \quad u_{mr}(1,t) = 0, \quad u_{mt}(r(t),t) = -u_{mr}(r(t),t)r'(t),$$

получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int\limits_1^{r(t)} u_{mr}^2\,dr + \frac{1}{2}u_{mr}^2(r(t),t)r'(t) + \int\limits_1^{r(t)} \varphi(u_m)u_{mrr}^2\,dr = 2\int\limits_1^{r(t)} \frac{\varphi(u_m)u_{mr}u_{mrr}}{r}\,dr$$
$$\le \varepsilon\int\limits_1^{r(t)} \varphi(u_m)u_{mrr}^2\,dr + c(\varepsilon)\int\limits_1^{r(t)} \varphi(u_m)u_{mr}^2\,dr, \quad \varepsilon < 1. \qquad (19)$$

Используя неотрицательность $r'(t)$ и выполнение условия (6), интегрируя по t (19), из (17) получим вторую равномерную оценку ($\varepsilon = \frac{1}{2}$):

$$\int\limits_1^{r(t)} u_{mr}^2\,dr + \int\limits_0^t u_{mr}^2(r(\tau),\tau)r'(\tau)\,d\tau + 2\delta(1-\varepsilon)\int\limits_0^t\int\limits_1^{r(\tau)} u_{mrr}^2\,drd\tau \le cc(\varepsilon) + \widetilde{c}, \qquad (20)$$

где $\widetilde{c}$ равномерно ограничивают $\int\limits_1^2 u_{mr}^2(r,0)dr$ в силу $u_0(r) \in W_2^1(1,2)$ и $u_0(2) = 0$. Из этой оценки, в частности, следует, что $|u_m(r,t)| \le c$.

Для получения равномерных оценок по t напомним, что имеют место равенства $(*)$ и $(**)$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^m \frac{\partial c_k^m}{\partial t}\omega_k(r,t) = \frac{\partial u_m}{\partial t} + \frac{\partial u_m}{\partial r}\frac{r-1}{r(t)-1}r'(t). \qquad (21)$$

Умножим каждое уравнение в (12) на $\frac{d}{dt}c_j^m(t)$ и просуммируем по j от 0 до m. Преобразуя полученное равенство и используя (21), выведем

$$\int\limits_1^{r(t)} u_{mt}\left(u_{mt} + u_{mr}\frac{r-1}{r(t)-1}r'(t)\right)\,dr$$
$$= \int\limits_1^{r(t)} \left(\varphi(u_m)u_{mrr} + \frac{2}{r}\varphi(u_m)u_{mr}\right)\left(u_{mt} + u_{mr}\frac{r-1}{r(t)-1}r'(t)\right)\,dr$$

$$= \int\limits_1^{r(t)} u_{mt}^2\,dr + \frac{r'(t)}{r(t)-1}\int\limits_1^{r(t)} u_{mt}u_{mr}(r-1)\,dr.$$

Используем это представление для оценки u_{mt}^2. Из (20) получим с новым ε

$$\frac{r'(t)}{r(t)-1}\int\limits_1^{r(t)} u_{mt}u_{mr}(r-1)\,dr \le r'(t)\left(\int\limits_1^{r(t)} u_{mr}^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_1^{r(t)} u_{mt}^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \varepsilon\int\limits_1^{r(t)} u_{mt}^2\,dr + c(\varepsilon){r'}^2(t).$$

Из непрерывности φ, равномерной ограниченности u_m и (20) получим

$$\int\limits_1^{r(t)}\left(\varphi(u_m)u_{mrr} + \frac{2}{r}\varphi(u_m)u_{mr}\right)\left(u_{mt} + u_{mr}\frac{r-1}{r(t)-1}r'(t)\right)\,dr$$

$$\le c\left(\int\limits_1^{r(t)}\varphi(u_m)u_{mrr}^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_1^{r(t)} u_{mt}^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\,\varepsilon\int\limits_1^{r(t)} u_{mt}^2\,dr + c(\varepsilon) + cr'(t)\left(\int\limits_1^{r(t)}\varphi(u_m)u_{mrr}^2\,dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+cr'(t) \le 2\varepsilon\int\limits_1^{r(t)} u_{mt}^2\,dr + c(\varepsilon)\int\limits_1^{r(t)}\varphi(u_m)u_{mrr}^2\,dr + c{r'}^2(t) + c\int\limits_1^{r(t)}\varphi(u_m)u_{mrr}^2\,dr + c(\varepsilon).$$

Выбирая $\varepsilon = \varepsilon_0 < \frac{1}{3}$ и интегрируя неравенство, получим равномерную по m оценку

$$\int\limits_0^t\int\limits_1^{r(\tau)} u_{mt}^2\,dr d\tau \le c\left(\int\limits_0^T {r'}^2(\tau)\,d\tau + 1\right). \tag{22}$$

При фиксированной $r(t) \in W_2^1(0,T)$ из оценок (20), (21), применяя теорему компактности для «шкалы» пространств из работы [15], можно вывести наличие подпоследовательности, сходящейся по норме

$$\left(\int\limits_0^T\int\limits_1^{r(t)}(|u(r,\tau)|^{p_1} + |u_r(r,\tau)|^{p_1})\,dr d\tau\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

для любого $p_1 \in [1,\infty)$ и почти всюду. Тогда из оценки

$$u_{mr}^4(r,t) = \left(\int\limits_1^r \frac{\partial u_{mr}^2(s,t)}{\partial s}\,ds\right)^2 \le 4\int\limits_1^r u_{mr}^2\,ds\int\limits_1^r u_{mrr}^2\,ds \le 4c\int\limits_1^r u_{mrr}^2\,ds,$$

следует, что семейство $\{u_{mr}^2\}$ равномерно ограничено в норме $L_2(Q_T)$. И по известной лемме это позволяет заключить, что u_{mr}^2 сходится в $L_q(0,T;L_q(1,r(t)))$, $q<2$.

Воспользуемся леммой, установленной в одной из работ автора.

Лемма. *Пусть $T\in(0,\infty)$ — заданное число, $x=s(t)$ — заданная функция, определенная на отрезке $[0,T]$, такая, что $s(t)\in W_2^1(0,T)$, $s(0)=1$, $s(t)>0$, $t\in[0,T)$ и отрезок $[0,T]$ можно разбить на конечное число интервалов, на каждом из которых $s'(t)\geq 0$ п.в. либо $s'(t)\leq 0$ п.в. Случай $s(T)=0$ допустим. Тогда*

$$\big(W_2^1(Qs)\cap L_\infty(0,T;\widetilde{W}_2^1(0,s(t)))\big)\subset C^{\frac14,\frac12}(\overline{Q}_s)\subset C^{\frac14}(\overline{Q}_s).$$

Здесь $Q_s=\{(x,t):0<x<s(t),\ t\in(0,T)\}$.

Для случая цилиндрических областей этот результат известен.

Вместе с равномерной сходимостью, следующей из этой леммы, установленная предыдущая сходимость позволяет перейти к пределу в нелинейных членах $\varphi(u_m)u_{mr}$, $\varphi'(u_m)u_{mr}^2$ соответствующего интегрального тождества, получающегося из (12) стандартным образом.

Это заканчивает обоснование наличия решения задачи (10) при фиксированной функции $r(t)\in W_2^1(0,T)$.

Теперь покажем, как для этой задачи получить равномерные оценки по номеру итерации n.

Оценки типа (20), очевидно, остаются справедливыми и для семейства u_n.

Исключение составляет оценка u_t^n. При ее оценке в правую часть входила норма $\frac{dr^n(t)}{dt}$ в $L_2(0,T)$. Она гарантировала непрерывность (и на самом деле даже гёльдеровость) u^n при фиксированном n, но не давала равномерной по n оценки u_t^n. Однако поскольку уравнение для u^n можно записать (почти всюду) в виде

$$u_t^n=\varphi(u^n)\left(u_{rr}^n+\frac{2}{r}u_r^n\right)\quad \text{в } Q_T^n=\{(r,t):1<r<r^n(t),\ t\in(0,T)\},\qquad (23)$$

равномерная по n оценка производной по t следует из этого уравнения и имеющихся оценок величин, стоящих справа. Поэтому далее считаем, что для u^n выполнены равномерные по n оценки в $L_\infty(0,T;L_2(1,r^n(t)))$ функций u^n, u_r^n, и в $L_2(Q_T^n)$ функций u_{rr}^n, и u_t^n и, следовательно, равномерные оценки u^n в $C\big(\overline{Q}_T^n\big)$.

Ниже мы покажем, что неотрицательность $\frac{d}{dt}r^n(t)$ следует из принципа максимума, состоящего в том, что при $u_0(r)\geq 0$, $u_0\in W_2^1(1,2)$, $u_0(2)=0$ решение задачи (10) неотрицательно в $Q_T=\{(r,t):1<r<r(t),\, t\in(0,T)\}$.

Последний можно установить стандартными рассуждениями, применявшимися для уравнений в цилиндрических областях.

Некоторые детали состоят в том, что первоначально надо переписать уравнение для u^n в виде

$$\frac{u_t^n}{\varphi(u^n)}=\left(u_{rr}^n+\frac{2}{r}u_r^n\right).\qquad (24)$$

Записать (24) в виде интегрального тождества

$$\int\limits_0^T\int\limits_1^{r^n(t)}\frac{u_t^n(r,\tau)}{\varphi(u^n)}f(r,\tau)\,drd\tau+\int\limits_0^T\int\limits_1^{r^n(t)}u_r^n(r,\tau)f_r(r,\tau)\,drd\tau$$
$$-2\int\limits_0^T\int\limits_1^{r^n(t)}\frac{u_r^n(r,\tau)f(r,\tau)}{r}\,drd\tau=0$$

для любых f из $L_2((1,\ell)\times(0,T))$ таких, что $f_r\in L_2((1,\ell)\times(0,T))$ и $f(r(t),t)=0$.

Ввести определенную на $[1,\ell]\times[0,T]$ функцию

$$U^n(r,t)=\begin{cases}u^n(r,t), & \text{если } r\le r^n(t),\\ 0, & \text{если } r\ge r^n(t),\end{cases}$$

непрерывность которой на $[1,\ell]\times[0,T]$ следует из непрерывности u^n.

Перепишем для нее интегральное тождество в виде

$$\int\limits_0^T\int\limits_1^{\ell}\frac{U_t^n(r,\tau)}{\varphi(U^n)}f(r,\tau)\,drd\tau+\int\limits_0^T\int\limits_1^{\ell}U_r^n(r,\tau)f_r(r,\tau)\,drd\tau$$
$$-2\int\limits_0^T\int\limits_1^{\ell}\frac{U_r^n(r,\tau)f(r,\tau)}{r}\,drd\tau=0. \quad (25)$$

После этого можно приступить к обоснованию принципа максимума. Для этого рассмотрим срезку $\overline{U}^n(r,t)=\min(U^n(r,t),0)$.

Известно, что так как для почти всех t функция U^n имеет обобщенную производную по r из $L_2(1,\ell)$, то $\frac{\partial\overline{U}^n}{\partial r}\in L_2(1,\ell)$ и на измеримом множестве

$$E_{nt}^-=\{r\in(1,\ell):U^n<0\}=\{r\in(1,\ell):\overline{U}^n<0\}$$

выполнены равенства $\overline{U}^n=U^n$, $\overline{U}_r^n=U_r^n$, а также равенство $\frac{\partial\overline{U}^n}{\partial r}=0$ на множестве $\{r\in(1,\ell):U^n\ge0\}$.

Аналогично для п.в. $r\in(1,\ell)$ функция U^n имеет обобщенную производную по t из $L_2(0,T)$ и

$$U^n=\overline{U}^n,\quad \frac{\partial\overline{U}^n}{\partial t}=\frac{\partial U^n}{\partial t}\quad \text{на } E_{nr}^-=\{t\in(0,T):U^n<0\},$$

а также U^n, $\frac{\partial\overline{U}^n}{\partial t}\in L_2(0,T)$, где $\frac{\partial}{\partial t}$ — обобщенная производная. Кроме того, $\frac{\partial\overline{U}^n}{\partial t}=0$ на $E_{nr}^+=\{t\in(0,T):U^n\ge0\}$.

По теореме Фубини поменяем порядок интегрирования в первом слагаемом тождества (25) и рассмотрим его на пробных функциях $f=f^t(r,\tau)$: $f^t(r,\tau)=0$ при $\tau\ge t$. Затем одну из них возьмем равной $\overline{U}^n(r,\tau)$ при $\tau<t$ и равной 0 при $\tau\ge t$.

Для первого слагаемого получим

$$\int\limits_1^\ell \int\limits_0^t \frac{U_t^n(r,\tau)\overline{U}^n(r,\tau)}{\varphi(U^n)}\,d\tau dr = \int\limits_1^\ell \int\limits_{E_{nr}^-} \frac{\overline{U}_t^n(r,\tau)\overline{U}^n(r,\tau)}{\varphi(\overline{U}^n)}\,d\tau dr$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^\ell \int\limits_0^t \frac{\partial}{\partial t}\Phi_1(\overline{U}^n)\,d\tau dr = \frac{1}{2}\int\limits_1^\ell (\Phi_1(\overline{U}^n(r,t)) - \Phi_1(\overline{U}^n(r,0)))\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_1^\ell \Phi_1(\overline{U}^n(r,t))\,dr. \quad (26)$$

Здесь

$$\Phi_1(u) = \int\limits_0^u \frac{\xi}{\varphi(\xi)}d\xi \geq 0,$$

а $\Phi_1(\overline{U}^n(r,0)) = 0$, так как $u_0 \geq 0$ на $(1,2)$.

Для остальных слагаемых тождества получим

$$\int\limits_0^t \int\limits_1^\ell rU_r^n\overline{U}_r^n\,drd\tau - \int\limits_0^t \int\limits_1^\ell U_r^n\overline{U}^n\,drd\tau = I - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \int\limits_1^\ell ((\overline{U}^n)^2)_r\,drd\tau$$

$$= I - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \left((\overline{U}^n(\ell,\tau))^2 - (\overline{U}^n(1,\tau))^2\right)d\tau = I + \frac{1}{2}\int\limits_0^t (\overline{U}^n)^2(1,\tau) \geq 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_0^\ell r\Phi_1(\overline{U}^n(r,t)\,dr = 0.$$

А так как $\Phi_1(\xi) \geq 0$ для всех ξ и $\Phi_1(\xi) = 0$ тогда и только тогда, когда $\xi = 0$, то $\overline{U}^n(r,t) = 0$ п.в. Это означает, что $U^n(r,t) \geq 0$ п.в., т. е. $u^n \geq 0$. Принцип максимума установлен.

Осталось показать, что неравенство $\frac{dr(t)}{dt} \geq 0$ и условие $r^n(t) \in W_2^1(0,T)$, которые использованы в формулировке теоремы компактности, действительно возникает в задачах с условием Стефана.

Для этого продифференцируем равенство (9) по t. Получим, используя наличие следа у функции $u_r^n(r,t)$ на непрерывной кривой $r = r^n(t)$ и условие (3), что

$$L_n\frac{d}{dt}r^{n+1}(t) = -\int\limits_1^{r^n(t)} u_t^n\,dr + \int\limits_1^{r^n(t)} \left(\frac{2}{r}\varphi(u^n)u_r^n - \varphi'(u^n)u_r^{n2}\right)dr$$

$$= -\varphi(0)u_r^n(r^n(t),t). \quad (27)$$

Это и есть условие Стефана (5). Однако в силу того, что $u^n(r,t) \geq 0$, будет выполнено $u_r^n(r^n(t),t) \leq 0$. Если $L_n = 0$, то полагали, что $r^{n+1}(t) = r^0(t) =$

$\frac{\ell-2}{T}t+2$, т. е. для таких n монотонность выполнена. Если же $L_n \neq 0$, то (в силу (27)) величина $\frac{dr(t)}{dt}$ знакопостоянная. Но так как $0 = r(0) < r(T) = \ell$, $\ell > 2$, необходимо $\frac{dr(t)}{dt} \geq 0$ (а потому и $L_n > 0$).

Замечание. В условии Стефана можно рассмотреть и случай, когда коэффициент L может зависеть от $r(t)$, как в [4, 7].

2. Теоремы об относительной компактности

Переходим к формулировкам и обоснованиям основной части работы — утверждениям об относительной компактности множеств функций, определенных на нецилиндрических областях (каждая на своей) в анизотропных пространствах.

2.1. Стационарный случай. Пусть, на время, r^n и r константы, $1 \leq r^n \leq \ell$ и $r^n \to r$ при $n \to \infty; 0 < \nu < 1$. Обозначим для заданных c и $\ell > 2$ множество функций, определенных на $[1, \ell]$:

$$G_c = \left\{ \widetilde{v}_n(\varrho) \in C^\nu([1,\ell]) : \widetilde{v}_n(\varrho) = \begin{cases} w_n(\varrho), & 1 \leq \varrho < r^n, \\ 0, & r^n \leq \varrho \leq \ell, \end{cases} \quad \text{где} \right.$$

$$\left. 1 \leq r^n \leq \ell, \quad r^n \to r, \quad \int_1^\ell (\widetilde{v}_n^2 + \widetilde{v}_{n\varrho}^2)\, d\varrho \leq c, \ \int_1^{r^n} w_{n\varrho\varrho}^2\, d\varrho \leq c \right\}.$$

Очевидно,что $\widetilde{v}_n(r^n) = 0$.

Лемма 1. *Для любого $c < \infty$ множество G_c для всех q_0: $1 \leq q_0 < 2$ относительно (счетно) компактно в $W^1_{q_0}(0, l)$.*

Доказательство. Определим числа $R^N = \inf\limits_{n \geq N} \{r^n, n = 1, 2, 3, \dots\}$. Тогда $R^{N+1} \geq R^N$ и $R^N \to r$ при $N \to \infty$. Функции $\widetilde{v}_1, \widetilde{v}_2, \dots, \widetilde{v}_n, \dots$ из пространства $W^1_2(1, \ell)$ начиная с $n \geq N$ принадлежат $W^2_2(1, R^N)$ и в силу последней оценки в определении G_c равномерно ограничены в норме $W^2_2(1, R^N)$. Поэтому существует подпоследовательность, для которой $\widetilde{v}_n \to v$ в $W^1_2(1, R^1)$. Отбросим у этой последовательности первый элемент (если он оказался элементом $\widetilde{v}_1$.) Оставшаяся часть будет состоять из функций, определенных в области $\varrho \in (1, \ell)$ и равномерно ограниченных в норме $W^2_2(1, R^2)$, и т.д. Диагональная последовательность состоит из функций пространства $W^1_2(1, \ell)$ и обладает тем свойством, что для всех N ее «хвост» начиная с номера N равномерно ограничен в $W^2_2(1, R^N)$. Обозначим ее $\{\widetilde{v}_n\}_{n \in A}$, где A — некоторое бесконечное подмножество натуральных чисел. Сохраняя для этой последовательности прежнее обозначение $\widetilde{v}_n$, далее считаем, что $n \in A$. Докажем, что она сходится в $W^1_{q_0}(1, \ell)$ для любого $1 \leq q_0 < 2$.

Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем $N_1(\varepsilon)$ так, чтобы для всех $n \in A$, $n \geq N_1$, выполнялось неравенство $|R^{N_1} - r^n| < \varepsilon$. Тогда для $n \geq N_1$, $m \geq N_1$ имеем $R^{N_1} \leq r^n$,

$R^{N_1} \leq r^m$ и, используя тот факт, что $\widetilde{v}^n_\varrho = 0$ при $\varrho \geq r^n$, получим

$$\int\limits_1^\ell \left|\widetilde{v}^n_\varrho - \widetilde{v}^m_\varrho\right|^{q_0} d\varrho \leq \int\limits_1^{R^{N_1}} + \int\limits_{R^{N_1}}^{r^n} + \int\limits_{R^{N_1}}^{r^m}.$$

Далее,

$$\int\limits_{R^{N_1}}^{r^n} \left|\widetilde{v}^n_\varrho - \widetilde{v}^m_\varrho\right|^{q_0} d\varrho \leq \left\{\int\limits_{R^{N_1}}^{r^n} \left|\widetilde{v}^n_\varrho - \widetilde{v}^m_\varrho\right|^2 d\varrho\right\}^{\frac{q_0}{2}} |r^n - R^{N_1}|^\chi \leq c^{\frac{q_0}{2}} \varepsilon^\chi, \quad \chi > 0.$$

Аналогично для третьего слагаемого. Для первого имеем

$$\int\limits_1^{R^{N_1}} \left|\widetilde{v}^n_\varrho - \widetilde{v}^m_\varrho\right|^{q_0} d\varrho =_{n,m \geq N_1} \int\limits_1^{R^{N_1}} \left|w^n_\varrho - w^m_\varrho\right|^{q_0} d\varrho \leq (\ell - 1)^{\frac{2-q_0}{2}} \|w^n - w^m\|^{q_0}_{W^1_2(1,R^{N_1})}. \tag{28}$$

Так как хвост диагональной последовательности $\{\widetilde{v}_n\}_{n \in A}$ сходится в норме $W^1_2(1, R^{N_1})$, по $\varepsilon > 0$ найдется такое $N_2(\varepsilon)$, что при $n, m \geq N_2$ выполнено неравенство $\|w^n - w^m\|_{W^1_2(1,R^{N_1})} < \varepsilon$, $n, m \in A$. Увеличив, если надо, $N_2(\varepsilon)$, считаем, что $N_2(\varepsilon) \geq N_1$. Отсюда следует, что правая часть (28) для $n, m \geq N_2(\varepsilon)$, $n, m \in A$, оценивается через $\widetilde{c}\varepsilon^{q_0}$. Поэтому

$$\int\limits_1^\ell |\widetilde{v}^n_\varrho - \widetilde{v}^m_\varrho|^{q_0} d\varrho \leq \widetilde{c}(\varepsilon^{q_0} + \varepsilon^\chi),$$

$$\widetilde{c} = \max(2c^{\frac{q_0}{2}}, (\ell - 1)^{\frac{2-q_0}{2}}) \text{ для всех } n, m \geq N_2(\varepsilon),\ n, m \in A.$$

2.2. Нестационарный случай. Зададим последовательность неубывающих функций $\{r^n(t)\}_{n=1}^\infty$, $t \in [0, T]$, такую, что $1 \leq r^n(t) \leq \ell$, $r^n(t) \to r(t)$ для всех $t \in [0, T]$. (Возможность выбора такой подпоследовательности из построенной в п. 1 последовательности $r^n(t)$ следует из условий $r^n(0) = 2$, $r^n(T) = \ell$ и второй теоремы Хелли.) По функциям $w_n(r, t)$, заданным на нецилиндрических областях $\{(r, t) : t \in [0, T],\ 1 \leq r \leq r^n(t)\}$, определим множество

$$F = \left\{\widetilde{W}_n(r, t) : \widetilde{W}_n(r, t) = \begin{cases} w^n, & 1 \leq r < r^n(t), \\ 0, & r^n(t) \leq r \leq \ell, \end{cases}\right\}$$

и будем считать, что для его элементов выполнены равномерные оценки

$$\|\widetilde{W}_n\|_{L_\infty(0,T;W^1_2(1,\ell))} \leq c, \quad \|\widetilde{W}_{nt}\|_{L_2(Q_\ell)} \leq c, \quad \int\limits_0^T \int\limits_1^{r^n(t)} w^2_{nrr}\, dr dt \leq c.$$

Замечание. Если в качестве функций w^n, $r^n(t)$ взять u^n, $r^n(t)$ (или их подпоследовательности), построенные в п. 1, то множество F будет определено корректно, а последние неравенства будут выполнены, так как $u^n(r^n(t), t) = 0$.

Определим измеримые множества

$$S_n = \{t \in [0,T] : \big\|\widetilde{W}_n(\cdot,t)\big\|_{W_2^1(1,\ell)} \le c < \infty, \|\widetilde{W}_{nrr}\|_{L_2(1,r^n(t))} < \infty\}.$$

Мера S_n равна мере $[0,T]$, так как для $\widetilde{W}_n$ выполнена первая оценка при определении F и в силу третьей оценки функция $\|\widetilde{W}_{nrr}(\cdot,t)\|_{L_2(1,r^n(t))}$ как функция t п.в. на $[0,T]$ конечна. Поэтому для множества $S = \bigcup\limits_n S_n$, имеем $S \subseteq [0,T]$ и мера S равна мере $[0,T]$.

Имеет место следующее утверждение, аналогичное леммам из [15].

Лемма 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $c(\varepsilon)$ такое, что для всех $t \in S$ и для всех натуральных n и m выполнено неравенство*

$$\|\widetilde{W}_n(\cdot,t) - \widetilde{W}_m(\cdot,t)\|^{q_0}_{W_2^1(1,\ell)} \le \varepsilon \left(1 + \int\limits_1^{r^n(t)} w^2_{nrr}(r,t)\,dr + \int\limits_1^{r^n(t)} w^2_{mrr}(x,t)dx\right)$$
$$+ c(\varepsilon)\|\widetilde{W}_n(\cdot,t) - \widetilde{W}_m(\cdot,t)\|^2_{L_2(1,\ell)}.$$

Доказательство. При отрицании утверждения существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого натурального k найдутся $t_k \in S$ и натуральные n_k и m_k, для которых выполнено неравенство

$$\|\widetilde{W}_{n_k}(\cdot,t_k) - \widetilde{W}_{m_k}(\cdot,t_k)\|^{q_0}_{W^1_{q_o}(1,\ell)} > \varepsilon_0 \left(1 + \int\limits_1^{r^{n_k}(t_k)} w^2_{n_k rr}(r,t_k)\,dr\right.$$
$$\left. + \int\limits_1^{r^{m_k}(t_k)} w^2_{m_k rr}(r,t_k)\,dr) + k\|\widetilde{W}_{n_k}(\cdot,t_k\right) - \widetilde{W}_{m_k}(\cdot,t_k)\|^2_{L_2(1,\ell)}.$$

Обозначим

$$\varphi_k(r) = \widetilde{W}_{n_k}(r,t_k), \psi_k(r) = \widetilde{W}_{m_k}(r,t_k), \quad r_k^1 = r^{n_k}(t_k),\ r_k^2 = r^{m_k}(t_k).$$

В этих обозначениях, вспоминая определения F и S, последнее неравенство можно переписать в виде

$$c_1 \ge \|\varphi_k - \psi_k\|^{q_0}_{W^1_{q_0}(1,\ell)} > \varepsilon_0 \left(1 + \int\limits_0^{r_k^1} \varphi^2_{krr}\,dr + \int\limits_1^{r_k^2} \psi^2_{krr}\,dr\right) + k\|\varphi_k - \psi_k\|^2_{L_2(1,\ell)}.$$

Выбирая подпоследовательность, считаем, что $r_k^1 \longrightarrow r_1, r_k^2 \longrightarrow r_2$. Нетрудно увидеть, что φ_k и ψ_k принадлежат G_{c_1/ε_0}. Тогда в силу леммы 1, выбирая, если необходимо, подпоследовательность, можно считать, что $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ и $\psi_k \longrightarrow \psi$ в $W^1_{q_0}(1,\ell)$. Отсюда

$$\varphi_k - \psi_k \longrightarrow \varphi - \psi \quad \text{в } W^1_{q_0}(1,\ell).$$

Из последнего неравенства следует, что $\|\varphi_k - \psi_k\|^2_{L_2(1,\ell)} \le c_1/k \longrightarrow 0$, т. е. $\varphi - \psi = 0$. Это противоречит условию $\|\varphi_k - \psi_k\|^{q_0}_{W^1_{q_0}(1,\ell)} > \varepsilon_0$, вытекающему из того же неравенства.

Теорема. *Множество F относительно компактно в $L_{q_0}\big(0,T;W^1_{q_0}(1,\ell)\big)$.*

Доказательство. Интегрируя неравенство леммы 2 по t, получим, что для любого $\varepsilon>0$ найдется постоянная $c(\varepsilon)$ такая, что для всех n и m верно неравенство

$$\int\limits_0^T \|\widetilde{W}_n(\cdot,t)-\widetilde{W}_m(\cdot,t)\|^{q_0}_{W^1_{q_0}(1,\ell)}\,dt \le \varepsilon\left(T+\int\limits_0^T\int\limits_1^{r^n(t)} w^2_{nrr}(r,t)\,drdt\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^T\int\limits_1^{r^n(t)} w^2_{mrr}(r,t)\,drdt\right)+c(\varepsilon)\int\limits_0^T \|\widetilde{W}_n(\cdot,t)-\widetilde{W}_m(\cdot,t)\|^2_{L_2(1,\ell)}\,dt$$
$$\le \varepsilon(T+2c)+c(\varepsilon)\int\limits_0^T \|\widetilde{W}_n(\cdot,t)-\widetilde{W}_m(\cdot,t)\|^2_{L_2(1,\ell)}\,dt. \quad (29)$$

По определению F верна оценка $\|\widetilde{W}_n\|_{W^1_2(Q_\ell)}\le c$. Поэтому существует подпоследовательность $\widetilde{W}_n$, сходящаяся сильно в $L_2(Q_\ell)$. Из неравенства (29) легко выводим, что эта подпоследовательность будет также сходиться по норме пространства $L_{q_0}\big(0,T;W^1_{q_0}(0,l)\big)$.

Замечание. Условия в теореме можно значительно обобщить, заменив ограниченность норм u^n_r и u^n_{rr} ограниченностью соответствующих норм некоторых функций от u^n_r и от производной функции u^n_r.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Подгаев А. Г.* Разрешимость осесимметричной задачи для нелинейного параболического уравнения в областях с нецилиндрической или неизвестной границей. I // Челяб. физ.-мат. журн. 2020. Т. 5, вып. 1. С. 44–55.
2. *Бородин А. М.* Задача Стефана // Укр. мат. вiсн. 2011. Т. 8. С. 17–54.
3. *Мейрманов А. М., Гальцева О. А., Сельдемиров В. Е.* О существовании обобщенного решения в целом по времени одной задачи со свободной границей // Мат. заметки. 2020. Т. 107, вып. 2. С. 229–240.
4. *Bollati J., Tarzia A. D.* One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change // Electron. J. Differ. Equ. 2018. N 10. P. 1–12.
5. *Белых В. Н.* Корректность одной нестационарной осесимметричной задачи гидродинамики со свободной поверхностью // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 4. С. 728-744.
6. *Тахиров Ж. О., Тураев Р. Н.* Нелокальная задача Стефана для квазилинейного параболического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2012. № 3. С. 8–16.
7. *Bollati J., Tarzia D. A.* Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face // Commun. Appl. Anal. 2018. V. 22. P. 309–322.
8. *Ли Ф., Лу Д.* Распространение решений для уравнения диффузии реакции со свободными границами в периодической среде // Электрон. журн. дифференц. уравн. 2018. № 185. С. 1–12.
9. *Kuznetsov I. V.* Kinetic formulation of forward-backward parabolic equations // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2016. V. 13. P. 930–949.
10. *Kuznetsov I. V., Sazhenkov S. A.* Anisotropic vanishing diffusion method applied to genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2018. V. 15. P. 1158–1173.

11. *Antontsev S. N., Kuznetsov I. V.* Existence of entropy measure-valued solutions for forward-backward p-parabolic equations // Sib. Elektron. Mat. Izv. 2017. V. 14. P. 774–793.

12. *Кожанов А. И., Мациевская Е. Е.* Вырождающиеся параболические уравнения с переменным направлением эволюции // Сиб. электрон. мат. изв. 2019. Т. 16. С. 718–731.

13. *Монахов В. Н., Попов С. В.* Контактные задачи математической физики // Динамика сплошной среды. 2000. № 116. С. 62–72.

14. *Егоров И. Е., Ефимова Е. С.* Модифицированный метод Галёркина для полулинейного параболического уравнения с меняющимся направлением времени // Сиб. журн. чистой и прикл. математики. 2016. Т. 16, № 2. С. 6–15.

15. *Подгаев А. Г.* Об относительной компактности множества абстрактных функций из шкалы банаховых пространств // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 2. С. 135–137.

16. *Simon J.* Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. 1987. V. 146. P. 65–96.

17. *Темиргалиев Н., Жайнибекова М. А., Джумакаева Г. Т.* Критерий вложения анизотропных классов Соболева — Морри в пространство равномерно непрерывных функций // Сиб. мат. журн. 2016. Т. 57, № 5. С. 1156–1170.

Поступила в редакцию 30 мая 2021 г.
После доработки 15 августа 2021 г.
Принята к публикации 26 ноября 2021 г.

Подгаев Александр Григорьевич
Тихоокеанский государственный университет,
ул. Тихоокеанская, 136, Хабаровск 680035
pvu1707@mail.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2021. Том 28, № 4

UDC 517.946

COMPACTNESS THEOREMS CONNECTED WITH PROBLEMS WITH UNKNOWN BOUNDARY

A. G. Podgaev

Abstract: The paper provides some of the results that were presented at the IX International Conference on Mathematical Modeling dedicated to the 75th anniversary of V. N. Vragov and are related to the study of problems with an unknown boundary by methods of compactness. A substantiation of the theorem on relative compactness is given, which can be used in the study of problems of the Stefan type with an unknown part of the boundary, as well as in problems for equations of variable type with an unknown boundary of type change. An example of such problem is given, and it is shown that the estimates obtained for approximate solutions of the equation and functions describing a sequence of boundaries approaching the sought boundary of the phase transition completely coincide with the conditions formulated in the main theorem on compactness.

The author is not aware of theorems of such type. The theorem is a new kind of compactness theorem, adapted to problems of the Stefan type.

For better perception, the simplest conditions are given under which the result is valid, which coincide with the conditions of the considered example. However, the result can be generalized to much more general situations, including the number of phase transition boundaries and replacing the estimate of the second derivative with an estimate of a more complex aggregate that occurs in equations with degenerations on solutions.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.37.71.006

Keywords: relative compactness, non-cylindrical domain, unknown boundary, Stefan condition.

REFERENCES

1. *Podgaev A. G.*, "Solvability of boundary value problems for non-linear parabolic equation in domains with a non-cylindrical or unknown boundary, I [in Russian]," Chelyabinsk. Fiz.-Mat. Zh., **5**, No. 1, 44–55 (2020).
2. *Borodin A. M.*, "Stefan's problem [in Russian]," Ukrainsk. Mat. Vestn., **8**, 17–54 (2011).
3. *Meirmanov A. M., Galtseva O. A., and Seldemirov V. E.*, "On the global-in-time existence of a generalized solution to a free boundary problem," Math. Notes, **107**, No. 2, 274–283 (2020).
4. *Bollati J. and Tarzia A. D.*, "One-phase Stefan problem with a latent heat depending on the position of the free boundary and its rate of change," Electron. J. Differ. Equ., No. 10, 1–12 (2018).
5. *Belykh V. N.*, "Correctness of one unsteady axisymmetric problem of hydrodynamics with a free surface," Sib. Math. J., **58**, No. 4, 728–744 (2017).
6. *Takhirov Zh. O. and Turaev R. N.*, "Nonlocal Stefan problem for a quasilinear parabolic equation [in Russian]," Vestn. Samarsk. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki, No. 3, 8–16 (2012).
7. *Bollati J. and Tarzia D. A.*, "Explicit solution for the one-phase Stefan problem with latent heat depending on the position and a convective boundary condition at the fixed face," Commun. Appl. Anal., **22**, 309–322 (2018). See http://arxiv.org/abs/1610.09338

8. *Lee F. and Lu D.*, "Propagation of solutions for the diffusion equation of a reaction with free boundaries in a periodic medium [in Russian]," Elektron. Zh. Differents. Uravn., No. 185, 1–12 (2018).
9. *Kuznetsov I. V.*, "Kinetic formulation of forward-backward parabolic equations," Sib. Elektron. Mat. Izv., **13**, 930–949 (2016).
10. *Kuznetsov I. V. and Sazhenkov S. A.*, "Anisotropic vanishing diffusion method applied to genuinely nonlinear forward-backward ultra-parabolic equations," Sib. Elektron. Mat. Izv., **15**, 1158–1173 (2018).
11. *Antontsev S. N. and Kuznetsov I. V.*, "Existence of entropy measure-valued solutions for forward-backward p-parabolic equations," Sib. Elektron. Mat. Izv., **14**, 774–793 (2017).
12. *Kozhanov A. I. and Matsievskaya E. E.*, "Degenerate parabolic equations with a variable direction of evolution [in Russian]," Sib. Elektron. Mat. Izv., **16**, 718–731 (2019).
13. *Monakhov V. N. and Popov S. V.*, "Contact problems of mathematical physics [in Russian]," Dinamika Sploshnoy Sredy, No. 116, 62–72 (2000).
14. *Egorov I. E. and Efimova E. S.*, "Modified Galerkin method for a semilinear parabolic equation with changing direction of time [in Russian]," Sib. Zh. Chist. Prikl. Mat., **16**, No. 2, 6–15 (2016).
15. *Podgaev A. G.*, "On relative compactness of a set of abstract functions in a scale of Banach spaces," Sib. Math. J., **34**, No. 2, 135–145 (1993).
16. *Simon J.*, "Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$," Ann. Mat. Pura Appl., **146**, 65–96 (1987).
17. *Temirgaliev N., Zhainibekova M. A., and Dzhumakaeva G. T.*, "A criterion for embedding of anisotropic Sobolev–Morrey classes in the space of uniformly continuous functions," Sib. Math. J., **57**, No. 5, 905–917 (2016).

Submitted May 30, 2021
Revised August 15, 2021
Accepted November 26, 2021

Aleksandr G. Podgaev
Pacific National University,
136 Tikhookeanskaya Street, Khabarovsk 680035, Russia
pvu1707@mail.ru