Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2020. Том 27, № 3

УДК 517.946

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

А. И. Кожанов

Аннотация. Изучается разрешимость в пространствах Соболева задачи Дирихле и других эллиптических задач для дифференциальных уравнений

$$u_{tt} + \alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) + Bu = f(x,t)$$

($x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (0,T)$, Δ — оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1,\dots,x_n$, B — эллиптический оператор второго порядка, также действующий по переменным $x_1,\dots,x_n$). Особенностью этих уравнений является то, что знак функции в них не фиксируется. Для изучаемых задач доказываются теоремы существования и единственности регулярных (имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение) решений.

DOI: 10.25587/SVFU.2020.63.12.002

Ключевые слова: дифференциальные уравнения третьего порядка, вырождение, эллиптические краевые задачи, регулярные решения, существование, единственность.

Введение

Дифференциальные уравнения

$$u_{tt} + \alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) + Bu = f(x,t) \tag{$*$}$$

в которых Δ — оператор Лапласа, действующий по переменным $x_1,\dots,x_n$, B — дифференциальный оператор второго порядка с произвольными коэффициентами, также действующий по пространственным переменным, в случае $\alpha(t) < 0$ в ряде источников [1–5] называют псевдогиперболическими. Для псевдогиперболических уравнений корректными будут обычные начально-краевые задачи — задачи, характерные для гиперболических дифференциальных уравнений второго порядка. С другой стороны, для уравнений ($*$) в некоторых случаях, в том числе и в случае $\alpha(t) < 0$, могут быть корректными и эллиптические задачи (задачи с данными на всей границе рассматриваемой области), см. [6–10].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–51–41009).

В частности, в работах [7, 9] для дифференциальных уравнений третьего порядка составного типа, включающих уравнения $(*)$, доказано существование обобщенных решений аналога задачи Дирихле. Далее, в [7–10] описаны некоторые классы уравнений третьего порядка вида $(*)$, для которых эллиптические краевые задачи имеют регулярные решения (т. е. такие решения, которые имеют все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в уравнение).

В настоящей работе изучены новые классы уравнений $(*)$, для которых эллиптические краевые задачи (задача Дирихле, вторая краевая и тому подобные) имеют регулярные решения. Особенностью изучаемых уравнений будет то, что функция $\alpha(t)$ в них может произвольным образом обращаться в нуль (в том числе и на множестве положительной меры) и может менять знак сколько угодно раз.

Изучаемые ниже дифференциальные уравнения $(*)$ имеют модельный вид. О некоторых других уравнениях, для которых результаты, представленные в настоящей работе, останутся справедливыми, будет сказано в конце статьи.

Именно такие уравнения $(*)$, для которых будут корректными эллиптические краевые задачи, автор и называет *псевдоэллиптическими.* Уточним, что псевдоэллиптическими могут оказаться и те уравнения, которые ранее назывались псевдогиперболическими. Этот факт означает, что для некоторых уравнений $(*)$ корректными могут оказаться и гиперболические, и эллиптические краевые задачи.

1. Постановка задач

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$ переменных $x_1, \dots, x_n$ с гладкой (для простоты бесконечно дифференцируемой) границей Γ, Q — цилиндр $\Omega \times (0, T)$, $S = \Gamma \times (0, T)$ — боковая граница Q. Далее, пусть $\alpha(t)$, $b^{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $b_0(x)$ и $f(x, t)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0, T]$, B — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x)$ определяется равенством

$$Bv = \frac{\partial}{\partial x_i}(b^{ij}(x)v_{x_j}) + b_0(x)v$$

(здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование в пределах от 1 до n).

Краевая задача I. *Найти функцию $u(x, t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$u_{tt} + \alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) + Bu = f(x, t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$u(x, t)|_S = 0, \tag{2}$$

$$u(x, 0) = u(x, T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{3}$$

Краевая задача II. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условие*

$$u_t(x,0) = u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

Краевая задача III. *Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения* (1) *и такую, что для нее выполняются условие* (2), *а также условие*

$$u(x,0) = u_t(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

Краевая задача I представляет собой обычную задачу Дирихле, краевая задача II есть эллиптическая задача с условиями Неймана по временной переменной, краевая задача III является эллиптической задачей со смешанными условиями по переменной t (о других задачах будет сказано в конце работы).

Всюду далее будут использоваться обычные пространства Лебега и Соболева; определение и описание свойств этих пространств можно найти в монографиях [11–13].

2. Разрешимость краевой задачи I

Всюду ниже будем считать, что выполняются условия

$$b^{ij}(x) \in C^1(\overline{\Omega}), \quad b^{ij}(x) = b^{ji}(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \quad i,j = 1,\dots,n; \tag{6}$$

$$b^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \overline{b}_0|\xi|^2, \quad \overline{b}_0 > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{7}$$

(эти условия означают, что оператор B эллиптичен и симметричен на множестве $\overline{\Omega}$).

Определим множество

$$V = \big\{v(x,t) : \, v(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^2(\Omega)\big) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$
$$v_t(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^2(\Omega)\big) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega), \quad v_{tt}(x,t) \in L_2(Q)\big\}.$$

Множество V есть линейное пространство. Зададим в V норму:

$$\|v\|_V = \big\{\|v\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} + \|v_t\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)} + \|v_{tt}\|^2_{L_2(Q)}\big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что V, снабженное этой нормой, будет банаховым пространством.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (6) *и* (7), *а также условия*

$$b_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \quad b_0(x) \leq 0 \quad \textit{при } x \in \overline{\Omega}; \tag{8}$$

$$\alpha(t) \in C^1([0,T]), \quad 2\overline{b}_0 - \alpha'(t) \geq 0 \quad \textit{при } t \in [0,T]. \tag{9}$$

Тогда краевая задача I не может иметь в пространстве V более одного решения.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ — решение из пространства V краевой задачи I с нулевой функцией $f(x,t)$. Рассмотрим равенство

$$-\int_Q (u_{tt} + \alpha(t)\Delta u_t + Bu)u \, dxdt = 0.$$

Используя краевые условия и условия (6)–(9), получим следствие данного равенства:

$$\int\limits_Q u_t^2\,dxdt \leq 0.$$

Из этого неравенства следует, что $u(x,t)$ — тождественно нулевая в Q функция. А это и означает, что краевая задача I не может иметь в пространстве V более одного решения.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (6)–(8), *а также условия*

$$|\alpha'(t)| < 2\overline{b}_0 \quad \textit{при} \quad t \in [0,T], \tag{10}$$

$$\alpha(0) \geq 0, \quad \alpha(T) \leq 0. \tag{11}$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f(x,0) = f(x,T) = 0$ при $x \in \Omega$, краевая задача I *имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V.*

Доказательство. Воспользуемся методом регуляризации. Пусть ε — положительное число. Обозначим через L_ε дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$L_\varepsilon v = -\varepsilon(v_{tttt} + \Delta^2 v) + v_{tt} + \alpha(t)\Delta v_t + Bv.$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в цилиндре Q решением уравнения*

$$L_\varepsilon u = f(x,t) \tag{1_ε}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2) *и* (3), *а также условия*

$$\Delta u|_S = 0, \tag{12}$$

$$u_{tt}(x,0) = u_{tt}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega. \tag{13}$$

Заметим прежде всего, что для решений краевой задачи (1)–(3), (12), (13) при выполнении условий теоремы имеют место априорные оценки

$$\varepsilon \int\limits_Q \left[u_{tt}^2 + (\Delta u)^2\right]\,dxdt + \|u\|^2_{W_2^1(Q)} \leq N_1\|f\|^2_{L_2(Q)} \tag{14}$$

с постоянной N_1, определяющейся лишь числами $\overline{b}_0$ и T, областью Ω и функцией $\alpha(t)$;

$$\int\limits_Q \left[u_{tttt}^2 + (\Delta^2 u)^2\right] dxdt \leq N_2\|f\|^2_{L_2(Q)} \tag{15}$$

с постоянной N_2, определяющейся функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, $b_0(x)$ и $\alpha(t)$, областью Ω, а также числами T и ε. Далее, краевая задача с условиями (2), (3), (12), (13) для уравнения

$$-\varepsilon\left(u_{tttt}^2 + \Delta^2 u\right) = f(x,t)$$

при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ очевидным образом разрешима в пространстве $W_2^4(Q)$. Из этого факта, оценок (14) и (15), а также из теоремы о методе продолжения по параметру [14] следует, что и задача (1_ε), (2), (3), (12), (13) при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ имеет решение $u^\varepsilon(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^4(Q)$. Покажем, что для семейства функций $\{u^\varepsilon(x,t)\}_{\varepsilon>0}$ имеют место априорные оценки, равномерные по ε. Индекс ε при получении оценок опустим.

Первой из таких оценок является оценка (14). Умножая уравнение (1_ε) на функцию $\Delta u(x,t)$ и интегрируя по цилиндру Q, после несложных выкладок получим равенство

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q\left[u_{x_itt}^2+(\Delta u_{x_i})^2\right]dxdt+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q u_{x_it}^2\,dxdt \\ +\int\limits_Q\left(Bu-\frac{1}{2}\alpha'(t)\Delta u\right)\Delta u\,dxdt=\int\limits_Q f\Delta u\,dxdt. \quad (16)$$

Условия (6)–(8) и (10) означают, что оператор $B-\frac{1}{2}\alpha'(t)\Delta$ эллиптичен и к последнему слагаемому левой части (16) можно применить второе основное неравенство для пары эллиптических операторов [11, 15]. Используя названное неравенство, учитывая оценку (14) и применяя неравенство Юнга, получим, что следствием (16) будет вторая априорная оценка для решений $u(x,t)$ краевой задачи (1_ε), (2), (3), (12), (13)

$$\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q\left[u_{x_itt}^2+(\Delta u_{x_i})^2\right]dxdt+\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q u_{x_it}^2\,dxdt \\ +\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_Q u_{x_ix_j}^2\,dxdt\le N_3\int\limits_Q f^2\,dxdt, \quad (17)$$

постоянная N_3, в которой определяется функциями $b^{ij}(x)$, $i,j=1,\dots,n$, $b_0(x)$, $\alpha(t)$, областью Ω и числом T.

Умножим уравнение (1_ε) на функцию $u_{tt}(x,t)$. Интегрируя по цилиндру Q, получим равенство

$$\varepsilon\int\limits_Q\left[u_{ttt}^2+(\Delta u_t)^2\right]dxdt+\int\limits_Q u_{tt}^2\,dxdt+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_Q\alpha'(t)u_{x_it}^2\,dxdt \\ +\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_Q b^{ij}u_{x_it}u_{x_jt}\,dxdt+\frac{\alpha(0)}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega u_{x_it}^2(x,0)\,dx \\ -\frac{\alpha(T)}{2}\sum_{i=1}^{n}\int\limits_\Omega u_{x_it}^2(x,T)\,dx=\int\limits_Q fu_{tt}\,dxdt-\int\limits_Q b_0uu_{tt}\,dxdt. \quad (18)$$

Условия (6), (7), (10) и (11) вместе с оценкой (14) и неравенством Юнга означают, что следствием (18) будет третья априорная оценка для решений $u(x,t)$ краевой задачи (1_ε), (2), (3), (12), (13)

$$\varepsilon \int\limits_Q \left[u_{ttt}^2 + (\Delta u_t)^2\right] dxdt + \int\limits_Q u_{tt}^2\, dxdt \le N_4 \int\limits_Q f^2\, dxdt, \tag{19}$$

постоянная N_4 в которой определяется лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, $b_0(x)$, $\alpha(t)$, областью Ω и числом T.

Умножим уравнение (1_ε) на функцию $-\Delta u_{tt}(x,t)$ и проинтегрируем по цилиндру Q. Вновь после несложных преобразований, но с интегрированием по переменной t в правой части, и с использованием условий теоремы и второго основного неравенства для пары эллиптических операторов нетрудно получить следующую оценку для решений $u(x,t)$:

$$\varepsilon \sum_{i=1}^n \int\limits_Q \left[u_{x_i ttt}^2 + (\Delta u_{x_i t})^2\right] dxdt + \sum_{i=1}^n \int\limits_Q u_{x_i tt}^2\, dxdt + \sum_{i,j=1}^n \int\limits_Q u_{x_i x_j t}^2\, dxdt \le N_5 \int\limits_Q \left(f^2 + f_t^2\right) dxdt, \tag{20}$$

постоянная N_5 в которой определяется лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, $b_0(x)$, $\alpha(t)$, областью Ω и числом T.

Последняя оценка

$$\varepsilon^2 \int\limits_Q \left[u_{tttt}^2 + (\Delta^2 u)^2\right]\, dxdt \le N_6 \int\limits_Q \left(f^2 + f_t^2\right) dxdt \tag{21}$$

очевидным образом вытекает из оценок (19) и (20); постоянная N_6 в этой оценке определяется лишь функциями $b^{ij}(x)$, $i,j = 1,\dots,n$, $b_0(x)$, $\alpha(t)$, областью Ω и числом T.

Оценок (17), (19)–(21) уже вполне достаточно для доказательства существования решений краевой задачи I. Действительно, из этих оценок и свойства рефлексивности гильбертова пространства следует, что существуют последовательности $\{\varepsilon_m\}$ положительных чисел, $\{u_m(x,t)\}$ решений краевой задачи (1_{ε_m}), (2), (3), (12), (13), а также функция $u(x,t)$ такие, что для них имеют место сходимости при $m \to \infty$

$$\varepsilon_m \to 0,$$
$$u_m(x,t) \to u(x,t) \text{ слабо в пространстве } W_2^2(Q),$$
$$\Delta u_{mt}(x,t) \to \Delta u_t(x,t) \text{ слабо в пространстве } L_2(Q),$$
$$\varepsilon_m(u_{mtttt}(x,t) + \Delta^2 u_m(x,t)) \to 0 \text{ слабо в пространстве } L_2(Q).$$

Очевидно, что предельная функция $u(x,t)$ будет принадлежать пространству V и что она будет представлять собой решение краевой задачи I.

Теорема доказана.

3. Разрешимость краевых задач II и III

Исследование разрешимости краевых задач II и III в целом проводится вполне аналогично исследованию разрешимости краевой задачи I — с помощью априорных оценок и метода регуляризации.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* (6)–(8), *а также условие*

$$\alpha(t) \in C^1([0,T]), \quad 2\overline{b}_0 + \alpha'(t) \geq 0 \quad \text{при} \quad t \in [0,T]. \tag{22}$$

Тогда краевая задача II *не может иметь в пространстве* V *более одного решения.*

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ есть решение из пространства V краевой задачи II с нулевой функцией. Рассмотрим равенство

$$\int\limits_Q (u_{tt} + \alpha(t)\Delta u_t + Bu)u_{tt}\, dxdt = 0.$$

Интегрируя по частям и используя условия (6)–(9), (22), получим неравенство

$$\int\limits_Q u_{tt}^2\, dxdt \leq 0.$$

Из этого неравенства следует, что функции $u_{tt}(x,t)$ и $u_t(x,t)$ тождественно нулевые в Q. Но тогда уравнение (1) преобразуется в эллиптическое уравнение

$$Bu = 0.$$

Из этого уравнения следует, что $u(x,t) \equiv 0$ в Q. Как уже говорилось при доказательстве теоремы 1, это и означает, что краевая задача II не может иметь в пространстве V более одного решения.

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть выполняются условия* (6)–(8), (10), *а также условие*

$$\alpha(0) \leq 0, \quad \alpha(T) \geq 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ *такой, что* $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, *краевая задача* II *имеет решение* $u(x,t)$, *принадлежащее пространству* V.

Доказательство теоремы 4 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 2 — лишь вместо условия (13) в краевой задаче для уравнения (1_ε) используется условие

$$u_{ttt}(x,0) = u_{ttt}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Теорема 5. *Пусть выполняются условия* (6)–(9). *Тогда краевая задача* III *не может иметь в пространстве* V *более одного решения.*

Доказательство теоремы 5 проводится полностью аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия* (6)–(8), (10), *а также условие*

$$\alpha(0) \geq 0, \quad \alpha(T) \geq 0.$$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $f(x,t) \in L_2(Q)$, $f_t(x,t) \in L_2(Q)$, $f(x,0) = 0$ при $x \in \Omega$, краевая задача III *имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V.*

При доказательстве теоремы 6 в краевой задаче для уравнения (1_ε) вместо условия (13) необходимо использовать условие

$$u_{tt}(x,0) = u_{ttt}(x,T) = 0, \quad x \in \Omega;$$

в остальном все рассуждения из доказательства теоремы 2 повторяются.

Комментарии и дополнения

1. В уравнении (1) оператор Лапласа можно заменить общим эллиптическим оператором второго порядка, в том числе с коэффициентами, зависящими от переменной t. Оператор B также можно заменить общим эллиптическим оператором второго порядка, коэффициенты которого могут быть функциями, зависящими от переменных $x_1, \ldots, x_n$ и t. Коэффициент α также может быть функцией, зависящей от всех переменных $x_1, \ldots, x_n$, t. Техника доказательства разрешимости краевых задач I–III для подобных уравнений будет вполне соответствовать технике доказательства теорем 1–6, условия, необходимые для единственности и существования решений, будут отличаться лишь громоздкостью по сравнению с представленными выше условиями.

2. Краевая задача, симметричная по отношению к задаче III, т. е. задача с условиями

$$u_t(x,0) = u(x,T) = 0, \quad x \in \Omega,$$

очевидным образом сводится к задаче III заменой $t = T - \tau$.

3. Граничные условия в задачах I–III вполне можно «пошевелить». Так, условие (2) можно заменить условием третьей краевой задачи, производную u_t в условиях (4) или (5) можно заменить функцией $u_t + \beta u$. Суть полученных результатов в целом не изменится.

4. Разрешимость эллиптических краевых задач можно изучать и для некоторых нелинейных уравнений вида (1). Пример таких уравнений (с одной пространственной переменной) можно найти в работе [16].

5. Еще одним примером дифференциальных уравнений нечетного порядка, которые можно назвать и псевдогиперболическими, и псевдоэллиптическими одновременно, и для которых будут корректны как гиперболические начально-краевые задачи, так и эллиптические задачи с данными на всей границе, могут служить уравнения

$$(-1)^{p+1}\frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} + \alpha\frac{\partial^{2p-1}}{\partial t^{2p-1}}(\Delta u) + Bu = f(x,t), \quad \alpha = \mathrm{const}$$

(также их дальнейшие обобщения с младшими членами). Техника доказательства существования и единственности регулярных решений эллиптических краевых задач для таких уравнений будет вполне аналогична технике доказательства теорем 1–6.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ларькин Н. А.* Теоремы существования для квазилинейных псевдогиперболических уравнений // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 6. С. 1316–1319.

2. *Liu Y., Li H.* H^1-Galerkin mixed finite element methods for pseudo-hyperbolic equations // Appl. Math. Comput. 2009. V. 212, N 2. P. 446–457.

3. *Худавердиев К., Велиев А.* Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. Баку: Чашыоглу, 2010.

4. *Mesloub S.* On an initial boundary value problem for a class of odd higher order pseudohyperbolic integrodifferential equations // J. Appl. Math. 2014. Article ID 464205.

5. *Zhao Z., Li H.* A continuous Galerkin method for pseudo-hyperbolic equations with variable coefficients // J. Math. Anal. Appl. 2019. V. 473, N 2. P. 1053–1072.

6. *Дубля З. Д.* О задаче Дирихле для некоторого класса уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 50–55.

7. *Кожанов А. И.* Краевые задачи и свойства решений для уравнений третьего порядка // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 12. С. 2143–2153.

8. *Кожанов А. И.* О краевых задачах для некоторых классов уравнений высокого порядка, неразрешенных относительно старшей производной // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 2. С. 324–340.

9. *Kozhanov A. I.* Composite type equations and inverse problems. VSP: Utrecht, 1999.

10. *Кожанов А. И., Потапова С. В.* Задача Дирихле для одного класса уравнений составного типа с разрывным коэффициентом при старшей производной // Дальневост. мат. журн. 2014. Т. 14, № 1. С. 48–65.

11. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

12. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

13. *Triebel H.* Interpolation theory. Function spaces. Differential operators. Berlin: VEB Deutcher Verl. Wissenschaften, 1978.

14. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.

15. *Ладыженская О. А.* Об интегральных оценках сходимости приближенных методов и решениях в функционалах для линейных эллиптических операторов. Вестн. ЛГУ. Сер. Математика. Механика. Астрономия. 1958, вып. 2. С. 60–69.

16. *Кожанов А. И., Ларькин Н. А., Яненко Н. Н.* Смешанная задача для некоторых классов уравнений третьего порядка. Новосибирск: Ин-т теор. и прикл. механики СО АН СССР, 1980. Препринт № 5.

Поступила в редакцию 29 мая 2020 г.
После доработки 29 мая 2020 г.
Принята к публикации 30 августа 2020г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математиски им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2020. Том 27, № 3

UDC 517.946

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THIRD–ORDER PSEUDOELLIPTIC EQUATIONS WITH DEGENERATION

A. I. Kozhanov

Abstract: We study the solvability in Sobolev spaces of the Dirichlet problem and other elliptic problems for the differential equations

$$u_{tt} + \alpha(t)\frac{\partial}{\partial t}(\Delta u) + Bu = f(x,t), \qquad (*)$$

$x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (0,T)$, where Δ if the Laplace operator acting in the variables $x_1, \dots, x_n$ and B is a second-order elliptic operator acting in the same variables $x_1, \dots, x_n$. A feature of the equations $(*)$ is that the sign of the function is not fixed in them. Existence and uniqueness theorems for regular solutions (having all generalized Sobolev's derivatives in the equation) are proved for the problems under study.

DOI: 10.25587/SVFU.2020.63.12.002

Keywords: third-order differential equation, degeneration, elliptic boundary value problem, regular solution, existence, uniqueness.

REFERENCES

1. *Larkin N. A.*, “Existence theorems for quasilinear pseudohyperbolic equations,” Sov. Math. Dokl., **26**, 260–263 (1982).
2. *Liu Y. and Li H.*, “H^1-Galerkin mixed finite element methods for pseudo-hyperbolic equations,” Appl. Math. Comput., **212**, No. 2, 446–457 (2009).
3. *Khudaverdiev K. and Veliev A.*, A Study of the One-Dimensional Mixed Problem for a Class of Pseudohyperbolic Third-Order Equations with Nonlinear Right-Hand Side [in Russian], Çaşioğlu, Baku (2010).
4. *Mesloub S.*, “On an initial boundary value problem for a class of odd higher order pseudohyperbolic integrodifferential equations,” J. Appl. Math., article ID 464205 (2014).
5. *Zhao Z. and Li H.*, “A continuous Galerkin method for pseudo-hyperbolic equations with variable coefficients,” J. Math. Anal. Appl., **473**, No. 2, 1053–1072 (2019).
6. *Dublya Z. D.*, “Dirichlet's problem for a class of third-order equations [in Russian],” Differ. Uravn., **13**, No. 1, 50–55 (1977).
7. *Kozhanov A. I.*, “Boundary value problems and properties of solutions for equations of the third order,” Differ. Equations, **25**, No. 12, 2143–2153 (1989).
8. *Kozhanov A. I.*, “Boundary value problems for some classes of higher-order equations that are unsolved with respect to the highest derivative,” Sib. Math. J., **35**, No. 2, 324–340 (1994).
9. *Kozhanov A. I.*, Composite Type Equations and Inverse Problems, Utrecht, VSP (1999).
10. *Kozhanov A. I. and Potapova S. V.*, “The Dirichlet problem for a class of composite type equations with a discontinuous coefficient of the highest derivative [in Russian],” Dal'nevost. Mat. Zh., **14**, No. 1, 48–65 (2014).
11. *Sobolev S. L.*, Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1991).

12. *Ladyzhenskaya O. A. and Uraltseva N. N.*, Linear and Quasilinear Elliptic Equations, Acad. Press, New York; London (1968).
13. *Triebel H.* Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, VEB Deutcher Verl. Wissenschaften, Berlin (1978).
14. *Trenogin V. A.* Functional Analysis [in Russian], Nauka, Moscow (1980).
15. *Ladyzhenskaya O. A.*, "On the integral convergence estimates for approximate solutions in functionals to linear elliptic operators [in Russian]," Vestn. LGU, Ser. Mat., Mekh., Astron., No. 2, 60–69 (1958).
16. *Kozhanov A. I., Larkin N. A., and Yanenko N. N.*, A Mixed Problem for Certain Classes of Third Order Equation, preprint No. 5, Inst. Teor. Prikl. Mat. SO AN SSSR, Novosibirsk (1980).

Submitted May 29, 2020
Revised May 29, 2020
Accepted August 30, 2020

Aleksandr I. Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia
kozhanov@math.nsc.ru