Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

УДК 517.956.223

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ЧЕТВЕРТИ ПЛОСКОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЭЛЕЯ — БИШОПА

Г. В. Демиденко, А. А. Кудрявцев

Аннотация. Рассматриваются смешанные краевые задачи в четверти плоскости для уравнения Рэлея — Бишопа. Предполагается, что краевые задачи удовлетворяют условию Лопатинского. Доказывается теорема об однозначной разрешимости в анизотропных соболевских пространствах с экспоненциальным весом.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.81.22.001

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, уравнение Рэлея — Бишопа, смешанная краевая задача, условие Лопатинского, соболевское пространство.

1. Введение

В работе проводятся исследования корректности смешанных краевых задач в четверти плоскости $\{t > 0,\ x > 0\}$ для уравнения Рэлея — Бишопа

$$\big(I - D_x^2\big)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \tag{1.1}$$

возникающего при моделировании колебаний стержней [1, 2].

Уравнение (1.1) является уравнением, не разрешенным относительно старшей производной по времени. Такие уравнения часто называют уравнениями соболевского типа, поскольку именно исследования С. Л. Соболева послужили началом для нового направления в теории уравнений с частными производными (см. [3, с. 333–447]).

В монографии [4] введена классификация линейных уравнений, не разрешенных относительно старшей производной, следующего вида:

$$L_0(D_x)D_t^l w + \sum_{k=0}^{l-1} L_{l-k}(D_x)D_t^k w = F(t,x),$$

где $L_0(D_x)$ — квазиэллиптический оператор, и построена некоторая теория краевых задач для таких уравнений. В частности, в [4] введен класс псевдогиперболических дифференциальных уравнений и для них была изучена задача Коши. Обобщение этих результатов содержится в работе [5]. Отметим, что уравнение (1.1) относится к классу псевдогиперболических.

В работе рассматриваются краевые задачи следующего вида:

$$\begin{gathered}\big(I - D_x^2\big)D_t^2 u + D_x^4 u - a^2 D_x^2 u = f(t,x), \quad x > 0,\ t > 0,\\ (b_{11}u + b_{12}D_x u)|_{x=0} = 0,\ (b_{21}u + b_{22}D_x u)|_{x=0} = 0,\ u\big|_{t=0} = 0,\ D_t u\big|_{t=0} = 0,\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $a = \mathrm{const}$. Предполагаем, что краевая задача (1.2) удовлетворяет условию Лопатинского (см. [4]).

Введем обозначение для граничных операторов:

$$b_j(D_x) = \sum_{k=1}^{2} b_{jk} D_x^{k-1}, \quad j = 1,\, 2.$$

Наша цель — доказательство существования и единственности решения задачи (1.2) в анизотропном весовом соболевском пространстве $W_{2,\gamma}^{2,4}(R^2_{++})$.

2. Формулировка результатов

В этом разделе сформулируем основной результат работы.

Вначале напомним определение анизотропного соболевского пространства $W_2^{l_1,l_2}(G)$, $G \subseteq R^2$ (см., например, [6, 7]).

Определение 1. Функция $u(t,x)$ *принадлежит анизотропному соболевскому пространству* $W_2^{l_1,l_2}(G)$, $l_1 \ge 0, l_2 \ge 0$, $G \subseteq \mathbb{R}^2$, если существуют обобщенные производные $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t,x)$ в области G при $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ таких, что

$$\frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} \le 1,$$

при этом $D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t,x) \in L_2(G)$. Норма в $W_2^{l_1,l_2}(G)$ имеет вид

$$\left\| u(t,x), W_2^{l_1,l_2}(G) \right\| = \sum_{\alpha:\alpha_1/l_1+\alpha_2/l_2 \le 1} \left\| D_t^{\alpha_1} D_x^{\alpha_2} u(t,x), L_2(G) \right\|.$$

В дальнейшем нам понадобятся анизотропные соболевские пространства $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G)$, $\gamma > 0$, с экспоненциальным весом $e^{-\gamma t}$. По определению функция $u(t,x)$ принадлежит $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G)$, если $e^{-\gamma t} u(t,x) \in W_2^{l_1,l_2}(G)$. Норма имеет вид

$$\left\| u(t,x), W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(G) \right\| = \left\| e^{-\gamma t} u(t,x), W_2^{l_1,l_2}(G) \right\|.$$

Сформулируем условие Лопатинского для краевой задачи (1.2). Рассмотрим краевую задачи на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения с параметром τ, $\operatorname{Re}\tau > \gamma > 0$:

$$\begin{gathered} \tau^2 \bigl(1 - D_x^2\bigr) v + D_x^4 v - a^2 D_x^2 v = 0, \quad x > 0, \\ b_1(D_x) v|_{x=0} = \psi_1(\tau), \quad b_2(D_x) v|_{x=0} = \psi_2(\tau), \quad \sup_{x>0} |v| < \infty. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Определение 2. Смешанная задача (1.2) *удовлетворяет условию Лопатинского*, если краевая задача (2.1) однозначно разрешима при любых ψ_1, ψ_2.

Напомним условия однозначной разрешимости краевой задачи (2.1).

Вначале покажем, что при $\operatorname{Re}\tau = \sigma > \gamma > 0$ характеристическое уравнение

$$L(\tau, \lambda) = \lambda^4 - (a^2 + \tau^2)\lambda^2 + \tau^2 = 0 \tag{2.2}$$

не имеет чисто мнимых корней.

Доказательство проведем от противного. Пусть существует корень λ_1 уравнения

$$\lambda^4 - a^2\lambda^2 + (1-\lambda^2)(\sigma + i\eta)^2 = 0, \quad \sigma > \gamma > 0,$$

такой, что при некоторых $\sigma_0 > 0$ и $\eta_0 \neq 0$ будет $\lambda_1 = i\nu$, $\nu \neq 0$. Подставляя λ_1 в характеристическое уравнение, получим

$$\nu^4 + a^2\nu^2 + (1+\nu^2)(\sigma_0 + i\eta_0)^2 = 0,$$

т. е.

$$\nu^4 + a^2\nu^2 + \sigma_0^2 + 2i\sigma_0\eta_0 - \eta_0^2 + \nu^2\sigma_0^2 + 2i\nu^2\sigma_0\eta_0 - \nu^2\eta_0^2 = 0.$$

Следовательно,

$$(1+\nu^2)\sigma_0\eta_0 = 0.$$

Однако $\sigma_0 \neq 0$ и $\eta_0 \neq 0$. Получаем противоречие.

Нетрудно проверить, что два корня λ_1^-, λ_2^- характеристического уравнения (2.2) при $\operatorname{Re}\tau = \sigma > \gamma > 0$ лежат в левой полуплоскости и два корня λ_1^+, λ_2^+ — в правой. Действительно, поскольку уравнение (2.2) не имеет чисто мнимых корней, то в силу непрерывной зависимости корней от коэффициентов уравнения, достаточно показать, что уравнение (2.2) при $\operatorname{Im}\tau = 0$ имеет по два корня слева и справа от мнимой оси. В этом легко убедиться непосредственно.

Представим характеристические многочлены граничных операторов $b_j(D_x)$ в виде

$$b_j(\lambda) = q_j(\tau,\lambda)L^-(\tau,\lambda) + \beta_j(\tau,\lambda), \quad j = 1,2,$$
$$L^-(\tau,\lambda) = (\lambda - \lambda_1^-)(\lambda - \lambda_2^-).$$

Поскольку $b_j(\lambda)$ — полиномы первой степени, то

$$q_j(\tau,\lambda) = 0, \quad \beta_j(\tau,\lambda) = b_{j1} + b_{j2}\lambda, \quad j = 1,2,$$

и матрица Лопатинского запишется в виде

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Краевая задача (2.1) однозначно разрешима, если

$$\det B \neq 0$$

(см., например, [4]).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Существует $\gamma_0 > 0$ такое, что при*

$$f(t,x) \in W_{2,\gamma}^{1,0}(R_{++}^2), \quad f(t,x)|_{t=0} = 0, \quad \gamma > \gamma_0,$$

краевая задача (1.2) однозначно разрешима в классе функций из $W_{2,\gamma}^{2,4}(R_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$, таких, что $D_t^2 D_x^2 u \in L_{2,\gamma}(R_{++}^2)$, и для решения $u(t,x)$ выполняется оценка

$$\|u(t,x), W_{2,\gamma}^{2,4}(R_{++}^2)\| \le c(\gamma_0)\|f(t,x), W_{2,\gamma}^{1,0}(R_{++}^2)\|,$$

где константа $c(\gamma_0)$ зависит от γ_0.

Отметим, что при доказательстве теоремы существенно будем использовать обобщенную теорему Пэли — Винера (см., например, [8]).

Рассмотрим множество функций $v(\tau,x)$, $\tau = i\eta+\sigma$, принадлежащих $\widetilde{L}_2(\mathbb{C}_\gamma^+) = \{\tau \in \mathbb{C} : \tau > \gamma\}$ для почти всех $x \in R_+$, т. е.

(а) для почти всех $x \in R_+$ функция $v(\tau,x)$ аналитическая в $\mathbb{C}_\gamma^+$;

(б) $\sup\limits_{\sigma>\gamma} \int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^\infty |v(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta < \infty$.

Введем на нем норму

$$\sup_{\sigma>\gamma} \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \int\limits_0^\infty |v(i\eta+\sigma,x)|^2\,dxd\eta \right)^{1/2}.$$

Полученное линейное нормированное пространство будем обозначать через $\widetilde{L}_2\big(\mathbb{C}_\gamma^+ \times R_+\big)$.

Для описания образа интегрального оператора Лапласа $\mathfrak{L}$ пространства $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(R_{++}^2)$, $l_1 > 0$, $l_2 \geq 0$, рассмотрим множество функций $v(\tau,x)$, принадлежащих $\widetilde{L}_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times R_+)$, таких, что при $l_2 > 0$

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^\infty |i\eta+\sigma|^{2\alpha_1} \left| D_x^{\alpha_2} v(i\eta+\sigma,x) \right|^2 dx\,d\eta < \infty, \quad \frac{\alpha_1}{l_1} + \frac{\alpha_2}{l_2} \leq 1,$$

а при $l_2 = 0$

$$\sup_{\sigma>\gamma} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^\infty |i\eta+\sigma|^{2\alpha_1} |v(i\eta+\sigma,x)|^2\,dx\,d\eta < \infty, \quad \alpha_1 \leq l_1.$$

Введем на нем норму

$$\sum_\alpha \sup_{\sigma>\gamma} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_0^\infty |i\eta+\sigma|^{2\alpha_1} |D_x^{\alpha_2} v(i\eta+\sigma,x)|^2\,dxd\eta \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Полученное линейное нормированное пространство будем обозначать символом $\widetilde{W}_2^{l_1,l_2}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times R_+)$.

Обобщенная теорема Пэли — Винера. *Оператор Лапласа $\mathfrak{L}$ отображает пространство функций из $W_{2,\gamma}^{l_1,l_2}(R_{++}^2)$ таких, что*

$$D_t^k u\big|_{t=0} = 0, \quad k = 0,\cdots,l_1-1,$$

на пространство $\widetilde{W}_2^{l_1,l_2}(\mathbb{C}_\gamma^+ \times R_+)$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

3. Доказательство разрешимости смешанной задачи

Проведем доказательство разрешимости краевой задачи (1.2).

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу на полупрямой $x > 0$ с параметром $\tau \in \mathbb{C}^+_\gamma$, для обыкновенного дифференциального уравнения, которая получается после применения оператора Лапласа по t к рассматриваемой задаче (1.2):

$$\begin{gathered} D^4_x v - a^2 D^2_x v - \tau^2 D^2_x v + \tau^2 v = \widetilde{f}(\tau, x), \quad x > 0, \\ b_1(D_x)v|_{x=0} = 0, \quad b_2(D_x)v|_{x=0} = 0, \quad \sup_{x>0}|v| < \infty, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $\widetilde{f}(\tau, x)$ — преобразование Лапласа по переменной t функции $f(t, x)$.

Покажем, что задача (3.1) имеет единственное решение в соболевском пространстве $W^4_2(R_+)$ при $\tau \in \mathbb{C}^+_\gamma$.

Построим решение задачи (3.1). Поскольку краевая задача (1.2) удовлетворяет условию Лопатинского, краевая задача (3.1) однозначно разрешима при любых $\widetilde{f}(\tau, x) \in L_2(R_+)$.

Представим решение краевой задачи (3.1) в виде

$$v(\tau, x) = v_0(\tau, x) + v_1(\tau, x), \tag{3.2}$$

где $v_0(\tau, x)$ — ограниченное частное решение уравнения

$$L(\tau, D_x)v_0 = \widetilde{f}(\tau, x), \quad x > 0, \tag{3.3}$$

а $v_1(\tau, x)$ — решение задачи

$$\begin{gathered} L(\tau, D_x)v_1 = 0, \quad x > 0, \\ b_1(D_x)v_1|_{x=0} = -b_1(D_x)v_0|_{x=0} = \psi_1(\tau), \\ b_2(D_x)v_1|_{x=0} = -b_2(D_x)v_0|_{x=0} = \psi_2(\tau), \end{gathered} \tag{3.4}$$

$L(\tau, D_x) = D^4_x - (a^2 + \tau^2)D^2_x + \tau^2 I$.

Ограниченное частное решение уравнения (3.3) можно записать в виде

$$v_0(\tau, x) = \int\limits_0^x J_-(\tau, x - s)\widetilde{f}(\tau, s)\, ds + \int\limits_x^\infty J_+(\tau, x - s)\widetilde{f}(\tau, s)\, ds, \tag{3.5}$$

где

$$J_-(\tau, x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_-} \frac{e^{x\lambda}}{L(\tau, \lambda)}\, d\lambda, \quad J_+(\tau, x) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_+} \frac{e^{x\lambda}}{L(\tau, \lambda)}\, d\lambda,$$

Γ_- — контур в комплексной плоскости, охватывающий корни λ^-_1, λ^-_2 уравнения (2.2), лежащие в левой полуплоскости, Γ_+ — контур, охватывающий корни λ^+_1, λ^+_2 уравнения (2.2), лежащие в правой полуплоскости, (см. [4, гл. 1]).

Выпишем интегральные формулы решения краевой задачи (3.4). Пусть b^{kj} — элементы обратной матрицы Лопатинского B^{-1}. Введем полиномы

$$N_1(\lambda) = b^{11}(\lambda - (\lambda^-_1 + \lambda^-_2)) + b^{21}, \quad N_2(\lambda) = b^{12}(\lambda - (\lambda^-_1 + \lambda^-_2)) + b^{22}.$$

Следуя [4, гл. 1], решение краевой задачи (3.4) можно записать в виде:

$$v_1(\tau,x)=\psi_1(\tau)J_1(\tau,x)+\psi_2(\tau)J_2(\tau,x), \tag{3.6}$$

где

$$J_1(\tau,x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_-}\frac{e^{\lambda x}N_1(\lambda)}{L^-(\tau,\lambda)}\,d\lambda,\quad J_2(\tau,x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_-}\frac{e^{\lambda x}N_2(\lambda)}{L^-(\tau,\lambda)}\,d\lambda. \tag{3.7}$$

С учетом (3.5) функции $\psi_1(\tau)$, $\psi_2(\tau)$ представимы в виде

$$\psi_j(\tau)=\int\limits_0^\infty\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{b_j(\lambda)e^{-s\lambda}}{L(\tau,\lambda)}\,d\lambda\widetilde{f}(\tau,s)\,ds,\quad j=1,2. \tag{3.8}$$

Учитывая (3.2), (3.5)–(3.7), получим

$$\begin{aligned}v(\tau,x)=\int\limits_0^x J_-(\tau,x-s)\widetilde{f}(\tau,s)\,ds+\int\limits_x^\infty J_+(\tau,x-s)\widetilde{f}(\tau,s)\,ds\\+\int\limits_0^\infty\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{b_1(\lambda)e^{-s\lambda}}{L(\tau,\lambda)}\,d\lambda\widetilde{f}(\tau,s)\,ds\,J_1(\tau,x)\\+\int\limits_0^\infty\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_+}\frac{b_2(\lambda)e^{-s\lambda}}{L(\tau,\lambda)}\,d\lambda\widetilde{f}(\tau,s)\,ds\,J_2(\tau,x).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Оценим функцию $v(\tau,x)$. Для этого проведем оценки $v_0(\tau,x)$, $v_1(\tau,x)$ отдельно.

В дальнейшем нам понадобятся оценки на корни уравнения (2.2) $\lambda_1^{\pm}(\tau)$, $\lambda_2^{\pm}(\tau)$.

Лемма 1. *Существуют константы $c_1,c_2>0$ такие, что при $\sigma>\gamma>0$, $\eta\in R$, $\tau=\sigma+i\eta$ имеют место оценки*

$$\operatorname{Re}\lambda_1^+(\tau)|\lambda_1^+(\tau)|\geq c_1\sigma|\tau|, \tag{3.10}$$

$$\operatorname{Re}\lambda_2^+(\tau)|\lambda_2^+(\tau)|\geq c_2\sigma, \tag{3.11}$$

где $\lambda_j^+(\tau)$, $j=1,2$, — корни уравнения (2.2), $\operatorname{Re}\lambda_j^+(\tau)>0$, $j=1,2$.

Имеет место представление

$$L(\tau,\lambda)=\lambda^4-a^2\lambda^2+(1-\lambda^2)\tau^2=(\lambda-\lambda_1^+(\tau))(\lambda-\lambda_1^-(\tau))(\lambda-\lambda_2^+(\tau))(\lambda-\lambda_2^-(\tau)).$$

Из оценки символа псевдогиперболического оператора (см. [5]) имеем

$$|L(\tau,i\xi)|\geq c\sigma(1+|\xi|^2)\left(|\tau|+|\xi|\sqrt{\frac{a^2+\xi^2}{1+\xi^2}}\right),\quad \xi\in R^n,$$

или

$$|i\xi - \lambda_1^+(\tau)||i\xi - \lambda_1^-(\tau)||i\xi - \lambda_2^+(\tau)||i\xi - \lambda_2^-(\tau)|$$
$$\geq c(1+\xi^2)\sigma\left(|\tau| + |\xi|\sqrt{\frac{a^2+\xi^2}{1+\xi^2}}\right) \geq c(1+\xi^2)\sigma|\tau|. \quad (3.12)$$

Взяв $\xi = \operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau)$, получим

$$|\operatorname{Re}\lambda_1^+(\tau)||i\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_1^-(\tau)||i\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^+(\tau)||i\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^-(\tau)|$$
$$\geq c\sigma(1 + |\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau)|^2)|\tau|.$$

Поскольку $-\operatorname{Re}\lambda_j^-(\tau) > 0$, $\operatorname{Re}\lambda_j^+(\tau) > 0$, будем иметь

$$|i\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_1^-(\tau)| = \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda_1^-(\tau))^2 + (\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau) - \operatorname{Im}\lambda_1^-(\tau))^2}$$
$$\leq \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda_1^+(\tau) - \operatorname{Re}\lambda_1^-(\tau))^2 + (\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau) - \operatorname{Im}\lambda_1^-(\tau))^2} = 2|\lambda_1^+(\tau)|,$$
$$|i\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^+(\tau)||i\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau) - \lambda_2^-(\tau)|$$
$$= \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda_2^+(\tau))^2 + (\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau) - \operatorname{Im}\lambda_2^+(\tau))^2}$$
$$\times \sqrt{(\operatorname{Re}\lambda_2^+(\tau))^2 + (\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau) + \operatorname{Im}\lambda_2^+(\tau))^2}$$
$$= \sqrt{(|\lambda_2^+(\tau)|^2 + (\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau))^2)^2 - 4(\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau))^2(\operatorname{Im}\lambda_2^+(\tau))^2}$$
$$\leq |\lambda_2^+(\tau)|^2 + (\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau))^2 \leq c(1 + (\operatorname{Im}\lambda_1^+(\tau))^2),$$

и приходим к требуемой оценке (3.10).

Для получения оценки (3.11) подставим в (3.12) $\xi = \operatorname{Im}\lambda_2^+(\tau)$.

Оценим функции $J_-(\tau, x)$, $J_+(\tau, -x)$.

Лемма 2. *Существует $\gamma_0 > 0$ такое, что при $\operatorname{Re}\tau > \gamma > \gamma_0$ имеют место оценки*

$$\int_0^\infty |J_-(\tau, x)|\,dx \leq c|\tau|^{-2}, \quad \int_0^\infty |J_+(\tau, -x)|\,dx \leq c|\tau|^{-2},$$

$$\int_0^\infty \left|D_x^k J_-(\tau, x)\right|dx \leq c|\tau|^{k-3}, \quad \int_0^\infty \left|D_x^k J_+(\tau, -x)\right|dx \leq c|\tau|^{k-3}, \quad k = 1, \ldots, 4,$$

где $c > 0$.

Доказательство. Оценим корни характеристического уравнения (2.2) при $\operatorname{Re}\tau > \gamma > 0$. Положим $\nu = \lambda^2$, тогда уравнение перепишется в виде

$$\nu^2 - (a^2 + \tau^2)\nu + \tau^2 = 0,$$

и корни уравнения ν_1, ν_2 примут вид

$$\nu_1 = \frac{a^2+\tau^2}{2}(1 + \sqrt{1-z}), \quad \nu_2 = \frac{a^2+\tau^2}{2}(1 - \sqrt{1-z}), \quad (3.13)$$

$$z = \frac{4\tau^2}{(a^2+\tau^2)^2}. \tag{3.14}$$

Пусть $\gamma_1 > 0$ такое число, что при $\operatorname{Re}\tau > \gamma > \gamma_1$ выполняется оценка $|z| < 1$, где z определяется в (3.14). Тогда для ν_1, ν_2 имеет место асимптотическое представление

$$\nu_{1,2} = \frac{a^2+\tau^2}{2}\left[1 \pm \left(1 - \frac{z}{2} + O(|z|^2)\right)\right], \quad |z| \to 0.$$

Учитывая определение z, будем иметь

$$\nu_1 = a^2+\tau^2 - \frac{\tau^2}{a^2+\tau^2} + O\left(\frac{|\tau|^4}{|a^2+\tau^2|^6}\right) = a^2+\tau^2-1+O\left(\frac{1}{|\tau|^2}\right) = \tau^2 + O(1),$$

$$\nu_2 = \frac{\tau^2}{a^2+\tau^2} + O\left(\frac{|\tau|^4}{|a^2+\tau^2|^6}\right) = 1 + O\left(\frac{1}{|\tau|^2}\right), \quad |\tau| \to \infty.$$

В силу обозначений $\nu^2 = \lambda$ корни уравнения (2.2) имеют вид

$$\lambda_1^{\pm} = \pm\sqrt{\nu_1}, \quad \lambda_2^{\pm} = \pm\sqrt{\nu_2},$$

ν_1, ν_2 определены в (3.13).

Существует $\gamma_2 > 0$ такое, что для $\gamma \geq \gamma_2$ выполняются оценки

$$\frac{|\tau|}{2} < |\lambda_1^{\pm}| < 2|\tau|, \tag{3.15}$$

$$\frac{1}{2} < |\lambda_2^{\pm}| < 2. \tag{3.16}$$

Применяя теорему о вычетах, получим

$$\left|D_x^k J_-(\tau,x)\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_-} \frac{\lambda^k e^{\lambda x}}{L(\tau,\lambda)}\,d\lambda\right|$$

$$\leq \left|\frac{(\lambda_1^-)^k e^{\lambda_1^- x}}{(\lambda_1^- - \lambda_2^-)(\lambda_1^- - \lambda_1^+)(\lambda_1^- - \lambda_2^+)}\right| + \left|\frac{(\lambda_2^-)^k e^{\lambda_2^- x}}{(\lambda_2^- - \lambda_1^-)(\lambda_2^- - \lambda_1^+)(\lambda_2^- - \lambda_2^+)}\right|.$$

С учетом оценок (3.15), (3.16) имеем

$$\int\limits_0^\infty \left|D_x^k J_-(\tau,x)\right|dx \leq \int\limits_0^\infty \frac{|\lambda_1^-|^k e^{\operatorname{Re}\lambda_1^- x}}{2|\lambda_1^-|^3\left|1 - \frac{|\lambda_2^-|^2}{|\lambda_1^-|^2}\right|}\,dx$$

$$+ \int\limits_0^\infty \frac{|\lambda_2^-|^k e^{\operatorname{Re}\lambda_2^- x}}{2|\lambda_1^-|^2|\lambda_2^-|\left|1 - \frac{|\lambda_2^-|^2}{|\lambda_1^-|^2}\right|}\,dx$$

$$\leq c_1\frac{|\tau|^{k-2}}{\operatorname{Re}\lambda_1^+|\lambda_1^+|} + c_2\frac{|\tau|^{-2}}{\operatorname{Re}\lambda_2^+|\lambda_2^+|}, \quad k = 0,\dots,4.$$

В силу (3.10), (3.11) приходим к требуемой оценке.

Аналогичным образом доказывается оценка для $D_x^k J_+(\tau,-x)$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Существует $\gamma_0 > 0$ такое, что при $\operatorname{Re}\tau > \gamma > \gamma_0$ имеют место оценки*

$$\|v_0(\tau,x), L_2(R_+)\| \le c|\tau|^{-2}\|\widetilde{f}(\tau,x), L_2(R_+)\|,$$
$$\|D_x^k v_0(\tau,x), L_2(R_+)\| \le c|\tau|^{k-3}\|\widetilde{f}(\tau,x), L_2(R_+)\|, \quad k=1,\dots,4,$$

с константой $c > 0$, не зависящией от τ и γ.

Доказательство. В силу свойств функции Грина производные $D_x^k v_0$, $k = 1\dots,4$, будут выглядеть следующим образом:

$$D_x^k v_0(\tau,x) = \int\limits_0^x D_x^k J_-(\tau,x-s)\widetilde{f}(\tau,s)\,ds + \int\limits_x^\infty D_x^k J_+(\tau,x-s)\widetilde{f}(\tau,s)\,ds, \quad k\le 3,$$

$$D_x^4 v_0(\tau,x) = \int\limits_0^x D_x^4 J_-(\tau,x-s)\widetilde{f}(\tau,s)\,ds + \int\limits_x^\infty D_x^4 J_+(\tau,x-s)\widetilde{f}(\tau,s)\,ds + \widetilde{f}(\tau,x).$$

Оценим k-е производные функции v_0 из (3.5) в L_2-норме, $k \le 3$. Используя функцию Хевисайда $\theta(x)$, при $k = 0,\dots,3$ будем иметь

$$\|D_x^k v_0(\tau,x), L_2(R_+)\|$$
$$= \left\|\int\limits_0^x D_x^k J_-(\tau,x-s)\widetilde{f}(\tau,s)\,ds + \int\limits_x^\infty D_x^k J_+(\tau,x-s)\widetilde{f}(\tau,s)\,ds,\ L_2(R_+)\right\|$$
$$= \left\|\int\limits_R \left[D_x^k J_-(\tau,x-s)\theta(x-s) + D_x^k J_+(\tau,x-s)\theta(s-x)\right]\widetilde{f}(\tau,s)\theta(s)\,ds,\ L_2(R)\right\|.$$

Применяя неравенства Юнга и Минковского, получим

$$\left\|D_x^k v_0(\tau,x), L_2(R_+)\right\|$$
$$\le \left(\int\limits_0^\infty \left|D_x^k J_-(\tau,x)\right|dx + \int\limits_{-\infty}^0 \left|D_x^k J_+(\tau,x)\right|dx\right)\|\widetilde{f}(\tau,x),\ L_2(R_+)\|.$$

Используя лемму 2, получим требуемую оценку при $k = 0,\dots,3$.

Оценка $\left\|D_x^4 v_0(\tau,x), L_2(R_+)\right\|$ повторяет рассуждения, проведенные для $\left\|D_x^k v_0(\tau,x), L_2(R_+)\right\|$ при $k = 0,\dots,3$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Существует $\gamma_0 > 0$ такое, что при $x > 0$ и $\operatorname{Re}\tau > \gamma > \gamma_0$ имеют место оценки*

$$|J_j(\tau,x)| \le ce^{-\delta_0 x}, \quad j=1,2,$$
$$\left|D_x^k J_j(\tau,x)\right| \le c|\tau|^{k-1}e^{-\delta_0 x}, \quad k=1,\dots,4, \quad j=1,2,$$

с константами $c, \delta_0 > 0$, не зависящими от τ и γ.

Доказательство. Из явного вида функции $J_1(\tau,x)$ (формула (3.7)), учитывая теорему о вычетах, получим

$$D_x^k J_1(\tau,x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_-} \frac{\lambda^k e^{\lambda x}(b^{11}(\lambda - (\lambda_1^- + \lambda_2^-)) + b^{21})}{(\lambda-\lambda_1^-)(\lambda-\lambda_2^-)}\,d\lambda$$
$$= \frac{(\lambda_1^-)^k e^{\lambda_1^- x}(-b^{11}\lambda_2^- + b^{21})}{\lambda_1^- - \lambda_2^-} + \frac{(\lambda_2^-)^k e^{\lambda_2^- x}(-b^{11}\lambda_1^- + b^{21})}{\lambda_2^- - \lambda_1^-}.$$

Принимая во внимание оценки корней (3.15), (3.16), (3.10), (3.11), а также $\lambda_j^- = -\lambda_j^+$, приходим к требуемым неравенствам.

Аналогичным образом оцениваются производные функции $J_2(\tau, x)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Существует* $\gamma_0 > 0$ *такое, что при* $x > 0$ *и* $\operatorname{Re}\tau > \gamma > \gamma_0$ *имеют место оценки*

$$\|v_1(\tau, x), L_2(R_+)\| \le c|\tau|^{-2}\|\widetilde{f}(\tau, x), L_2(R_+)\|,$$

$$\left\|D_x^k v_1(\tau, x), L_2(R_+)\right\| \le c|\tau|^{k-3}\|\widetilde{f}(\tau, x), L_2(R_+)\|, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Доказательство. Из (3.6), применяя неравенство Минковского, получим

$$\left\|D_x^k v_1(\tau, x), L_2(R_+)\right\| \le \sum_{j=1}^{2} \left| \int_0^\infty b_j(D_y) J_+(y-s)|_{y=0} \widetilde{f}(\tau, s)\, ds \right| \left\|D_x^k J_j(\tau, x), L_2(R_+)\right\|. \tag{3.17}$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера и леммой 2:

$$\left| \int_0^\infty b_j(D_y) J_+(y-s)|_{y=0} \widetilde{f}(\tau, s)\, ds \right| \le \left(\int_0^\infty |b_j(D_y) J_+(y-s)|_{y=0}|^2 ds \right)^{1/2} \times \|\widetilde{f}(\tau, x), L_2(R_+)\| \le c|\tau|^{-2}\|\widetilde{f}(\tau, x), L_2(R_+)\|. \tag{3.18}$$

Воспользовавшись леммой 4, из (3.17), (3.18) придем к требуемой оценке.

Лемма доказана.

Используя леммы 3 и 5, получим, что функция $v(\tau, x)$ вида (3.9) является решением краевой задачи (3.1), принадлежащим $W_2^4(R_+)$, и для него выполняются оценки

$$\|v(\tau, x), L_2(R_+)\| \le c_1\|\tau^{-2}\widetilde{f}(\tau, x), L_2(R_+)\|,$$

$$\left\|D_x^k v(\tau, x), L_2(R_+)\right\| \le c_2\|\tau^{k-3}\widetilde{f}(\tau, x), L_2(R_+)\|, \quad k = 1, \dots, 4.$$

Поскольку константы c_1 и c_2 не зависят от τ и $\widetilde{f}(\tau, x)$, при $\gamma > \gamma_0$ имеют место оценки

$$\|v(\tau, x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times R_+)\| \le c\|\tau^{-2}\widetilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times R_+)\|,$$

$$\left\|\tau^2 D_x^2 v(\tau, x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times R_+)\right\| \le c\|\tau\widetilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times R_+)\|,$$

$$\left\|D_x^4 v(\tau, x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times R_+)\right\| \le c\|\tau\widetilde{f}(\tau, x), L_2(\mathbb{C}_\gamma^+ \times R_+)\|.$$

Для того чтобы применить обобщенную теорему Пэли — Винера, нужно показать аналитичность функции $v(\tau, x)$ в $\mathbb{C}_\gamma^+$ при почти всех $x > 0$.

Поскольку $f(t, x) \in L_{2,\gamma}(R_{++}^2)$, $\gamma > \gamma_0$, аналитичность в $\mathbb{C}_\gamma^+$ первых двух слагаемых в представлении (3.9) очевидна. Аналитичность третьего и четвертого слагаемых вытекает из условия Лопатинского, построения полиномов

$N_j(\tau, \lambda)$ и аналитичности коэффициентов $L^-(\tau, \lambda)$. Последнее является следствием подготовительной теоремы Вейерштрасса (см., например, [9]).

Из проведенных рассуждений и обобщенной теоремы Пэли — Винера следует, что функция

$$u(t, x) = \mathfrak{L}^{-1}_{\tau \to t}(v(\tau, x)),$$

принадлежащая пространству $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_{++}), \gamma > \gamma_0$, является решением задачи (1.2). Она представима в виде

$$u(t, x) = Pf(t, x),$$

и для нее имеет место оценка

$$\left\| u(t, x), W^{2,4}_{2,\gamma}\left(R^2_{++}\right) \right\| \le c(\gamma) \left\| f(t, x), W^{1,0}_{2,\gamma}\left(R^2_{++}\right) \right\|.$$

Итак, существование решения краевой задачи (1.2) установлено. Докажем единственность. Очевидно, для этого нужно показать, что однородная задача (1.2) имеет только тривиальное решение в классе $W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_{++})$.

Пусть $u(t, x) \in W^{2,4}_{2,\gamma}(R^2_{++}), \gamma > \gamma_0$, решение задачи (1.2) при $f \equiv 0$. Тогда при $\operatorname{Re}\tau > \gamma > \gamma_0$ функция

$$v(\tau, x) = \mathfrak{L}_{t \to \tau}(u(t, x)) \in W^4_2(R_+)$$

является решением краевой задачи

$$\begin{gathered} D^4_x v - (a^2 + \tau^2) D^2_x v + \tau^2 v = 0, \quad x > 0, \\ b_1(D_x) v|_{x=0} = 0, \quad b_2(D_x) v|_{x=0} = 0, \quad \sup_{x>0} |v(\tau, x)| < \infty. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Так как коэффициенты уравнения

$$D^4_x v - (a^2 + \tau^2) D^2_x v + \tau^2 v = 0$$

не зависят от x, очевидно, при $\operatorname{Re}\tau > \gamma > \gamma_0$ функция $v(\tau, x)$ принадлежит $W^k_2(R_+)$ для любых $k \ge 0$. Следовательно, по теореме вложения при таких τ эта функция эквивалентна бесконечно дифференцируемой функции по x. Поскольку классическое решение задачи (3.19) нулевое, почти всюду $v(\tau, x) = 0$. Отсюда следует, что и $u(t, x) = 0$ почти всюду. Единственность доказана.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Герасимов С. И., Ерофеев В. И.* Задачи волновой динамики элементов конструкций. Саров: ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2014.
2. *Fedotov I., Shatalov M., Marais J.* Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration // Acta Mech. 2016. V. 227, N 11. P. 3315–3324.
3. *Соболев С. Л.* Избранные труды. Т. 1. Уравнения математической физики. Вычислительная математика и кубатурные формулы. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики; филиал «Гео» изд-ва СО РАН, 2003.
4. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. книга, 1998.

5. *Демиденко Г. В.* Условия разрешимости задачи Коши для псевдогиперболических уравнений // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1289–1303.
6. *Успенский С. В., Демиденко Г. В., Перепелкин В. Г.* Теоремы вложения и приложения к дифференциальным уравнениям. Новосибирск: Наука, 1984.
7. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975.
8. *Демиденко Г. В.* Пространства Соболева и обобщенные решения: учеб. пособие. Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: РИЦ НГУ, 2015.
9. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 29 марта 2021 г.
После доработки 29 марта 2021 г.
Принята к публикации 26 августа 2021 г.

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru

Кудрявцев Александр Андреевич
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090

Математические заметки СВФУ
Июль—сентябрь, 2021. Том 28, № 3

UDC 517.956.223

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE RAYLEIGH—BISHOP EQUATION IN A QUARTER PLANE

G. V. Demidenko and A. A. Kudryavtsev

Abstract: We consider initial-boundary value problems for the Rayleigh–Bishop equation in a quarter plane. It is assumed that the initial-boundary value problems satisfy the Lopatinskii condition. A unique solvability in an anisotropic Sobolev space with an exponential weight is proved and an estimate for the solution is established.

DOI: 10.25587/SVFU.2021.81.22.001

Keywords: pseudohyperbolic equation, Rayleigh–Bishop equation, initial-boundary value problem, Lopatinskii condition, Sobolev space.

REFERENCES

1. *Gerasimov S. I. and Erofeev V. I.*, Problems of Wave Dynamics of Structural Elements [in Russian], Sarov: Ross. Fed. Yad. Tsentr-Vseross. Nauchn.-Issled. Inst. Eksp. Fiz., (2014).

2. *Fedotov I., Shatalov M., and Marais J.*, "Hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations in the theory of vibration," Acta Mech., **227**, No. 11, 3315–3324 (2016).

3. *Sobolev S. L.*, Selected Works, vol. I: Equations of Mathematical Physics, Computational Mathematics, and Cubature Formulas (G. V. Demidenko and V. L. Vaskevich, eds.), Springer, New York (2006).

4. *Demidenko G. V. and Uspenskii S. V.*, Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative, Marcel Dekker, New York; Basel (2003).

5. *Demidenko G. V.*, "Solvability conditions of the Cauchy problem for pseudohyperbolic equations," Sib. Math. J., **56**, No. 6, 1028–1041 (2015).

6. *Uspenskii S. V., Demidenko G. V., and Perepelkin V. G.*, Embedding Theorems and Applications to Differential Equations [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1984).

8. *Besov O. V., Il'in V. P., and Nikol'skii S. M.*, Integral Representations of Functions and Embedding Theorems, vol. I, II, John Wiley & Sons, New York; Toronto; London (1978, 1979).

8. *Demidenko G. V.*, Sobolev Spaces and Generalized Solutions [in Russian], Izdat. Novosib. Gos. Univ., Novosibirsk (2015).

9. *Shabat B. V.*, Introduction to Complex Analysis, Part II, Functions of Several Variables, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1992).

Submitted March 29, 2021
Revised March 29, 2021
Accepted August 26, 2021

Gennadiy V. Demidenko
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia; Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia
demidenk@math.nsc.ru

A. A. Kudryavtsev
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia