Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2019. Том 26, № 4

УДК 517.929.4

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ В МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОПУЛЯЦИЙ С НЕСКОЛЬКИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

М. А. Скворцова

Аннотация. Рассматривается модель, описывающая взаимодействие n видов микроорганизмов. Модель представлена в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений с несколькими постоянными запаздываниями. Компоненты решений системы отвечают за численности популяций i-го вида и за концентрацию питательного вещества. Параметры запаздывания обозначают время, необходимое для появления i-го вида после потребления питательного вещества. Изучаются асимптотические свойства решений рассматриваемой системы. При определенных условиях на параметры системы получены оценки для всех компонент решений. Установленные оценки характеризуют скорости убывания численностей популяций микроорганизмов и скорость стабилизации концентрации питательного вещества к начальной величине концентрации. Оценки имеют конструктивный характер, все величины, характеризующие скорости стабилизации, указаны в явном виде. При получении оценок были использованы модифицированные функционалы Ляпунова — Красовского.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.23.62.006

Ключевые слова: модель взаимодействия популяций, уравнения с запаздывающим аргументом, оценки решений, модифицированный функционал Ляпунова — Красовского.

1. Введение

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздываниями, описывающая взаимодействие нескольких видов микроорганизмов [1]:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}S(t) = (S^0 - S(t))D - \sum_{i=1}^{n} p_i(S(t))N_i(t),\\ \frac{d}{dt}N_i(t) = -D_iN_i(t) + \alpha_i p_i(S(t-\tau_i))N_i(t-\tau_i), \quad i = 1, 2, \ldots, n.\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $S(t)$ — концентрация питательного вещества в момент времени t, $N_i(t)$ — численность популяции i-го вида микроорганизмов в момент времени t, $p_i(S)$ — функция потребления питательного вещества для популяции i-го вида, $\tau_i \geq 0$ — время, необходимое для появления i-го вида после потребления питательного вещества, $D_i > 0$ — показатель потребления для i-го вида, $\alpha_i = e^{-D_i\tau_i}$,

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18–31–00408).

$\alpha_i N_i(t-\tau_i)$ отвечает за численность тех микроорганизмов от популяции N_i, которые потребляют питательное вещество в момент времени $t-\tau_i$ и живут время τ_i, необходимое для появления i-го вида, $S^0 > 0$ — концентрация питательного вещества в начальный момент времени, $D > 0$ — показатель расхода питательного вещества. Предполагается, что функции $p_i(S)$ удовлетворяют следующим условиям: $p_i(S)$ локально липшицевы, монотонно возрастающие и $p_i(0) = 0$.

Более подробное описание модели содержится в [1].

Для системы (1) зададим начальные условия:

$$\begin{gathered} S(t) = \varphi_0(t), \quad t \in [-\tau_{\max}, 0], \quad S(+0) = \varphi_0(0), \quad \tau_{\max} = \max\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}, \\ N_i(t) = \varphi_i(t), \quad t \in [-\tau_i, 0], \quad N_i(+0) = \varphi_i(0), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — непрерывные неотрицательные функции. Хорошо известно, что решение начальной задачи (1), (2) существует и единственно. Более того, как отмечено в [1], при неотрицательных начальных функциях решение задачи (1), (2) определено на всей правой полуоси $\{t > 0\}$ и имеет неотрицательные компоненты, при этом каждая компонента решения является ограниченной функцией.

Система (1) имеет тривиальное положение равновесия

$$S(t) = S^0, \quad N_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

В работе [1] было показано, что при выполнении неравенств

$$\alpha_i p_i(S^0) < D_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

все решения уравнения (1) с неотрицательными начальными условиями стабилизируются на бесконечности к данному положению равновесия.

В настоящей работе при выполнении условий (3) получим оценки решений, характеризующие скорость стабилизации на бесконечности. Отметим, что для получения оценок решений систем с запаздыванием активно применяются модифицированные функционалы Ляпунова — Красовского (см., например, [2–13]). Мы также будем использовать этот подход. Данная работа продолжает исследования [14–16] асимптотических свойств решений биологических моделей.

2. Основные результаты

Вначале приведем вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Для компонент решения начальной задачи* (1), (2) *при* $t \in [0, \tau_i]$ *имеют место равенства*

$$N_i(t) = \psi_i(t), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

где

$$\psi_i(t) = e^{-D_i t} \left(\varphi_i(0) + \alpha_i \int\limits_{-\tau_i}^{t-\tau_i} e^{D_i(s+\tau_i)} p_i(\varphi_0(s)) \varphi_i(s) ds \right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5}$$

Доказательство. Из системы (1) при $t \in [0, \tau_i]$ имеем

$$\frac{d}{dt}N_i(t) = -D_i N_i(t) + \alpha_i p_i(\varphi_0(t-\tau_i))\varphi_i(t-\tau_i),$$

откуда, используя метод вариации произвольной постоянной, нетрудно получить (5).

Лемма доказана.

Следствие. *Для компонент решения начальной задачи* (1), (2) *при* $t \in [0, \tau_i]$ *справедливы неравенства*

$$N_i(t) \le \Phi_i e^{-D_i t}, \quad i = 1, \dots, n, \tag{6}$$

где

$$\Phi_i = \varphi_i(0) + \alpha_i \int\limits_{-\tau_i}^{0} e^{D_i(s+\tau_i)} p_i(\varphi_0(s))\varphi_i(s)ds, \quad i = 1, \dots, n. \tag{7}$$

Доказательство. Неравенство (6) непосредственно вытекает из (4), (5).

Следствие доказано.

Лемма 2. *Для первой компоненты решения начальной задачи* (1), (2) *при* $t \ge 0$ *справедлива оценка*

$$S(t) \le S^0 + (\varphi_0(0) - S^0)e^{-Dt}. \tag{8}$$

Доказательство. Из первого уравнения системы (1) получим

$$\frac{d}{dt}S(t) \le (S^0 - S(t))D,$$

откуда в силу неравенства Гронуолла (см., например, [17]) следует оценка (8).

Лемма доказана.

Перейдем к получению оценок на функции $N_i(t)$ при $t > \tau_i$. Предположим, что выполнены условия (3). Рассмотрим модифицированные функционалы Ляпунова — Красовского

$$V_i(t, N_i) = N_i^2(t) + \int\limits_{t-\tau_i}^{t} m_i e^{-k_i(t-\xi)} N_i^2(\xi)d\xi, \quad i = 1, \dots, n, \tag{9}$$

где

$$k_i > 0, \quad m_i = \alpha_i p_i(S^0)e^{k_i\tau_i/2} < D_i. \tag{10}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (3).

(а) *Если* $\varphi_0(0) \le S^0$, *то для компонент решения начальной задачи* (1), (2) *при* $t > \tau_i$ *справедливы неравенства*

$$N_i(t) \le \sqrt{V_i(\tau_i, \psi_i)}\; e^{-\sigma_i(t-\tau_i)/2}, \tag{11}$$

где

$$\sigma_i = \min\{2(D_i - \alpha_i p_i(S^0)e^{k_i\tau_i/2}), k_i\} > 0. \tag{12}$$

(б) *Если* $\varphi_0(0) > S^0$, *то для компонент решения начальной задачи* (1), (2) *при* $t > \tau_i$ *справедливы неравенства*

$$N_i(t) \le \varkappa_i \sqrt{V_i(\tau_i, \psi_i)}\; e^{-\sigma_i(t-\tau_i)/2}, \tag{13}$$

где

$$\varkappa_i = \exp\left(\frac{\alpha_i e^{k_i\tau_i/2}}{2D}\frac{(p_i(\varphi_0(0)) + p_i(S^0))}{p_i(S^0)}L_i(\varphi_0(0))(\varphi_0(0) - S^0)\right), \tag{14}$$

$L_i(\varphi_0(0))$ — *константа Липшица функции* $p_i(S)$ *на отрезке* $[S^0, \varphi_0(0)]$, *т. е.*

$$|p_i(S_1) - p_i(S_2)| \le L_i(\varphi_0(0))|S_1 - S_2|, \quad S_1, S_2 \in [S^0, \varphi_0(0)]. \tag{15}$$

Доказательство. Продифференцируем функционал (9) вдоль решения начальной задачи (1), (2):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}V_i(t, N_i) &= 2N_i(t)(-D_iN_i(t) + \alpha_i p_i(S(t-\tau_i))N_i(t-\tau_i)) \\ &\quad + m_iN_i^2(t) - m_ie^{-k_i\tau_i}N_i^2(t-\tau_i) - k_i\int\limits_{t-\tau_i}^{t} m_ie^{-k_i(t-\xi)}N_i^2(\xi)\,d\xi \\ &\le -\left(2D_i - m_i - \frac{\alpha_i^2 p_i^2(S(t-\tau_i))}{m_ie^{-k_i\tau_i}}\right)N_i^2(t) - k_i\int\limits_{t-\tau_i}^{t} m_ie^{-k_i(t-\xi)}N_i^2(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

С учетом обозначения (10) это неравенство перепишется в виде

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}V_i(t, N_i) \\ &\quad \le -\left(2D_i - 2\alpha_i p_i(S^0)e^{k_i\tau_i/2} - \frac{\alpha_i e^{k_i\tau_i/2}}{p_i(S^0)}\big(p_i^2(S(t-\tau_i)) - p_i^2(S^0)\big)\right)N_i^2(t) \\ &\qquad\qquad - k_i\int\limits_{t-\tau_i}^{t} m_ie^{-k_i(t-\xi)}N_i^2(\xi)\,d\xi.\end{aligned}$$

Используя обозначение (12) и определение (9) функционала $V_i(t, N_i)$, получим оценку

$$\frac{d}{dt}V_i(t, N_i) \le -\left(\sigma_i - \frac{\alpha_i e^{k_i\tau_i/2}}{p_i(S^0)}(p_i^2(S(t-\tau_i)) - p_i^2(S^0))\right)V_i(t, N_i).$$

В силу оценки (8) отсюда при $t > \tau_i$ вытекает неравенство

$$\frac{d}{dt}V_i(t, N_i) \le -\left(\sigma_i - \frac{\alpha_i e^{k_i\tau_i/2}}{p_i(S^0)}\big(p_i^2(S^0 + (\varphi_0(0) - S^0)e^{-D(t-\tau_i)}) - p_i^2(S^0)\big)\right)V_i(t, N_i).$$

Обозначим

$$f_i(t) = \frac{\alpha_i e^{k_i\tau_i/2}}{p_i(S^0)}\big(p_i^2(S^0 + (\varphi_0(0) - S^0)e^{-D(t-\tau_i)}\big) - p_i^2(S^0)).$$

С учетом введенного обозначения полученное неравенство можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}V_i(t,N_i) \le -\left(\sigma_i - f_i(t)\right)V_i(t,N_i),$$

откуда нетрудно получить

$$N_i^2(t) \le V_i(t,N_i) \le V_i(\tau_i,\psi_i)\exp\left(-\int\limits_{\tau_i}^{t}(\sigma_i - f_i(\eta))d\eta\right)$$
$$= V_i(\tau_i,\psi_i)\exp\left(\int\limits_{\tau_i}^{t} f_i(\eta)d\eta\right)e^{-\sigma_i(t-\tau_i)}, \quad t > \tau_i. \quad (16)$$

Вначале предположим, что $\varphi_0(0) \le S^0$. Поскольку $p_i(S)$ — монотонно возрастающая функция, то $f_i(\eta) \le 0$. Отсюда следует неравенство (11).

Теперь рассмотрим случай $\varphi_0(0) > S^0$. Используя монотонность функции $p_i(S)$ и неравенство (15), получим следующую оценку:

$$\int\limits_{\tau_i}^{t} f_i(\eta)d\eta = \frac{\alpha_i e^{k_i\tau_i/2}}{p_i(S^0)}\int\limits_{\tau_i}^{t}\left(p_i(S^0 + (\varphi_0(0) - S^0)e^{-D(\eta-\tau_i)}) + p_i(S^0)\right)$$
$$\times\left(p_i(S^0 + (\varphi_0(0) - S^0)e^{-D(\eta-\tau_i)}) - p_i(S^0)\right)d\eta$$
$$\le \frac{\alpha_i e^{k_i\tau_i/2}}{p_i(S^0)}\int\limits_{\tau_i}^{t}\left(p_i(\varphi_0(0)) + p_i(S^0)\right)L_i(\varphi_0(0))(\varphi_0(0) - S^0)e^{-D(\eta-\tau_i)}\,d\eta$$
$$= \alpha_i e^{k_i\tau_i/2}\,\frac{\left(p_i(\varphi_0(0)) + p_i(S^0)\right)}{p_i(S^0)}L_i(\varphi_0(0))(\varphi_0(0) - S^0)\frac{1}{D}(1 - e^{-D(t-\tau_i)})$$
$$\le \frac{\alpha_i e^{k_i\tau_i/2}}{D}\,\frac{\left(p_i(\varphi_0(0)) + p_i(S^0)\right)}{p_i(S^0)}L_i(\varphi_0(0))(\varphi_0(0) - S^0).$$

Отсюда и из оценки (16) вытекает неравенство (13).

Теорема доказана.

Наконец, получим оценки на функцию $S(t)$, которые будут характеризовать скорость стабилизации на бесконечности к величине S^0.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (3).

(a) *Если* $\varphi_0(0) \le S^0$, *то для первой компоненты решения начальной задачи* (1), (2) *при* $t \ge 0$ *справедлива оценка*

$$|S(t) - S^0| \le |\varphi_0(0) - S^0|e^{-Dt} + \sum_{i=1}^{n} p_i(S^0)$$
$$\times\left(\Phi_i \min\{t,\tau_i\}e^{-d_i t} + \sqrt{V_i(\tau_i,\psi_i)}(t - \min\{t,\tau_i\})e^{-\omega_i(t-\tau_i)}\right), \quad (17)$$

где Φ_i *определено в* (7), $V_i(\tau_i,\psi_i)$ *определено в* (9), $\psi_i(t)$ *определено в* (5),

$$d_i = \min\{D_i, D\}, \quad \omega_i = \min\left\{\frac{\sigma_i}{2}, D\right\}, \quad (18)$$

σ_i *определено в* (12).

(б) *Если* $\varphi_0(0) > S^0$, *то для первой компоненты решения начальной задачи* (1), (2) *при* $t \geq 0$ *справедлива оценка*

$$|S(t) - S^0| \leq |\varphi_0(0) - S^0|e^{-Dt} + \sum_{i=1}^{n} p_i(\varphi_0(0)) \times (\Phi_i \min\{t, \tau_i\}e^{-d_i t} + \varkappa_i \sqrt{V_i(\tau_i, \psi_i)}(t - \min\{t, \tau_i\})e^{-\omega_i(t-\tau_i)}), \quad (19)$$

где $\varkappa_i$ *определено в* (14).

Доказательство. Из первого уравнения системы (1) нетрудно получить

$$S(t) - S^0 = (\varphi_0(0) - S^0)e^{-Dt} - \sum_{i=1}^{n} \int_0^t e^{-D(t-\xi)} p_i(S(\xi))N_i(\xi)\, d\xi.$$

Учитывая неравенство (8) и монотонность функции $p_i(S)$, будем иметь

$$p_i(S(\xi)) \leq p_i(S^0 + (\varphi_0(0) - S^0)e^{-D\xi}) \leq p_i(\max\{S^0, \varphi_0(0)\}).$$

Следовательно,

$$|S(t) - S^0| \leq |\varphi_0(0) - S^0|e^{-Dt} + \sum_{i=1}^{n} p_i(\max\{S^0, \varphi_0(0)\}) \int_0^t e^{-D(t-\xi)} N_i(\xi)\, d\xi$$

$$= |\varphi_0(0) - S^0|e^{-Dt} + \sum_{i=1}^{n} p_i(\max\{S^0, \varphi_0(0)\}) \times \left(\int_0^{\min\{t,\tau_i\}} e^{-D(t-\xi)} N_i(\xi) d\xi + \int_{\min\{t,\tau_i\}}^t e^{-D(t-\xi)} N_i(\xi) d\xi \right).$$

Вначале предположим, что $\varphi_0(0) \leq S^0$. Воспользуемся неравенствами (6) и (11):

$$|S(t) - S^0| \leq |\varphi_0(0) - S^0|e^{-Dt} + \sum_{i=1}^{n} p_i(S^0) \times \left(\Phi_i \int_0^{\min\{t,\tau_i\}} e^{-D(t-\xi)} e^{-D_i \xi} d\xi + \sqrt{V_i(\tau_i, \psi_i)} \int_{\min\{t,\tau_i\}}^t e^{-D(t-\xi)} e^{-\sigma_i(\xi-\tau_i)/2} d\xi \right).$$

Учитывая обозначения (18), из этого неравенства получим оценку

$$|S(t) - S^0| \leq |\varphi_0(0) - S^0|e^{-Dt} + \sum_{i=1}^{n} p_i(S^0) \times \left(\Phi_i \int_0^{\min\{t,\tau_i\}} e^{-d_i(t-\xi)} e^{-d_i \xi} d\xi + \sqrt{V_i(\tau_i, \psi_i)} \int_{\min\{t,\tau_i\}}^t e^{-\omega_i(t-\xi)} e^{-\omega_i(\xi-\tau_i)} d\xi \right),$$

из которой следует (17).

Если $\varphi_0(0) > S^0$, то вместо неравенства (11) нужно воспользоваться неравенством (13). Повторяя предыдущие рассуждения, получим оценку (19).

Теорема доказана.

3. Заключение

В настоящей работе рассматривалась система дифференциальных уравнений с запаздываниями, описывающая взаимодействие нескольких видов микроорганизмов. С использованием модифицированных функционалов Ляпунова — Красовского получены оценки для всех компонент решений системы. Установленные оценки характеризуют скорости убывания численностей популяций микроорганизмов и скорость стабилизации концентрации питательного вещества к начальной величине концентрации. Оценки имеют конструктивный характер, все величины, характеризующие скорости стабилизации, указаны в явном виде.

Автор выражает благодарность профессору Г. В. Демиденко за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wolkowicz G. S. K., Xia H.* Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays // SIAM J. Appl. Math. 1997. V. 57, N 4. P. 1019–1043.
2. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. математика, механика, информатика. 2005. Т. 5, № 3. С. 20–28.
3. *Хусаинов Д. Я., Иванов А. Ф., Кожаметов А. Т.* Оценки сходимости решений линейных стационарных систем дифференциально-разностных уравнений с постоянным запаздыванием // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41, № 8. С. 1137–1140.
4. *Mondie S., Kharitonov V. L.* Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach // IEEE Trans. Autom. Control. 2005. V. 50, N 2. P. 268–273.
5. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и периодическими коэффициентами в линейных членах // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1025–1040.
6. *Demidenko G. V.* Stability of solutions to linear differential equations of neutral type // J. Anal. Appl. 2009. V. 7, N 3. P. 119–130.
7. *Водопьянов Е. С., Демиденко Г. В.* Асимптотическая устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом при возмущении коэффициентов // Мат. заметки ЯГУ. 2011. Т. 18, № 2. С. 32–40.
8. *Матвеева И. И., Щеглова А. А.* Оценки решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с параметрами // Мат. заметки ЯГУ. 2012. Т. 19, № 1. С. 60–69.
9. *Матвеева И. И.* Оценки решений одного класса систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Сиб. журн. индустр. математики. 2013. Т. 16, № 3. С. 122–132.
10. *Демиденко Г. В., Матвеева И. И.* Об оценках решений систем дифференциальных уравнений нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 5. С. 1059–1077.
11. *Матвеева И. И.* Об экспоненциальной устойчивости решений периодических систем нейтрального типа // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 2. С. 344–352.
12. *Матвеева И. И.* Оценки экспоненциального убывания решений линейных систем нейтрального типа с периодическими коэффициентами // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 3. Р. 96–103.
13. *Ыскак Т.* Об устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений нейтрального типа с распределенным запаздыванием // Сиб. журн. индустр. математики. 2019. Т. 22, № 3. С. 118–127.
14. *Скворцова М. А.* Устойчивость решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Мат. заметки СВФУ. 2016. Т. 23, № 2. С. 108–120.
15. *Скворцова М. А.* Оценки решений в модели хищник-жертва с запаздыванием // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2018. Т. 25. С. 109–125.

16. *Скворцова М. А.* Об оценках решений в модели хищник-жертва с двумя запаздываниями // Сиб. электрон. мат. изв. 2018. Т. 15. С. 1697–1718.
17. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

Поступила в редакцию 11 сентября 2019 г.
После доработки 22 ноября 2019 г.
Принята к публикации 27 ноября 2019г.

Скворцова Мария Александровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
sm-18-nsu@yandex.ru

Математические заметки СВФУ
Октябрь—декабрь, 2019. Том 26, № 4

UDC 517.929.4

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF SOLUTIONS IN A MODEL OF INTERACTION OF POPULATIONS WITH SEVERAL DELAYS

M. A. Skvortsova

Abstract. We consider a model describing the interaction of n species of microorganisms. The model is presented as a system of nonlinear differential equations with several constant delays. The components of solutions to the system are responsible for the biomass of the i-th species and for the concentration of the nutrient. The delay parameters denote the time required for the conversion of the nutrient to viable biomass for the i-th species. In the paper, we study asymptotic properties of the solutions to the considered system. Under certain conditions on the system parameters, we obtain estimates for all components of the solutions. The established estimates characterize the rate of decrease in the biomass of microorganisms and the rate of stabilization of the nutrient concentration to the initial value of the concentration. The estimates are constructive and all values characterizing the stabilization rate are indicated explicitly. The modified Lyapunov–Krasovskii functionals were used to obtain the estimates.

DOI: 10.25587/SVFU.2019.23.62.006

Keywords: model of interaction of populations, delay differential equations, estimates of solutions, modified Lyapunov–Krasovskii functional.

REFERENCES

1. *Wolkowicz G. S. K., Xia H.*, "Global asymptotic behavior of a chemostat model with discrete delays," SIAM J. Appl. Math., **57**, No. 4, 1019–1043 (1997).

2. *Demidenko G. V. and Matveeva I. I.*, "Asymptotic properties of solutions to delay differential equations [in Russian]," Vestn. NGU. Ser. Mat. Mekh. Inform., **5**, No. 3, 20–28 (2005).

3. *Khusainov D. Ya., Ivanov A. F., Kozhametov A. T.*, "Convergence estimates for solutions of linear stationary systems of differential-difference equations with constant delay," Differ. Equ., **41**, No. 8, 1196–1200 (2005).

4. *Mondie S. and Kharitonov V. L.*, "Exponential estimates for retarded time-delay systems: LMI approach," IEEE Trans. Autom. Control., **50**, No. 2, 268–273 (2005).

5. *Demidenko G. V. and Matveeva I. I.*, "Stability of solutions to delay differential equations with periodic coefficients of linear terms," Sib. Math. J., **48**, No. 5, 824–836 (2007).

6. *Demidenko G. V.*, "Stability of solutions to linear differential equations of neutral type," J. Anal. Appl., **7**, No. 3, 119–130 (2009).

7. *Vodop'yanov E. S. and Demidenko G. V.*, "Asymptotic stability of the solutions of linear differential equations with retarded argument under the perturbation of the coefficients [in Russian]," Mat. Zamet. YAGU, **18**, No. 2, 32–40 (2011).

8. *Matveeva I. I. and Shcheglova A. A.*, "Estimates of the solutions of a class of nonlinear differential equations with retarded argument and parameters [in Russian]," Mat. Zamet. YAGU, **19**, No. 1, 60–69 (2012).

9. *Matveeva I. I.*, "Estimates of solutions to a class of systems of nonlinear delay differential equations," J. Appl. Ind. Math., **7**, No. 4, 557–566 (2013).

10. *Demidenko G. V. and Matveeva I. I.*, "On estimates of solutions to systems of differential equations of neutral type with periodic coefficients," Sib. Math. J., **55**, No. 5, 866–881 (2014).
11. *Matveeva I. I.*, "On exponential stability of solutions to periodic neutral-type systems," Sib. Math. J., **58**, No. 2, 264–270 (2017).
12. *Matveeva I. I.*, "Estimates of the exponential decay of solutions to linear systems of neutral type with periodic coefficients," J. Appl. Ind. Math., **13**, No. 3, 511–518 (2019).
13. *Yskak T.*, "On the stability of systems of linear differential equations of neutral type with distributed delay," J. Appl. Ind. Math., **13**, No. 3, 575–583 (2019).
14. *Skvortsova M. A.*, "Stability of solutions in the predator-prey model with delay [in Russian]," Mat. Zamet. SVFU, **23**, No. 2, 108–120 (2016).
15. *Skvortsova M. A.*, "Estimates for solutions in a predator-prey model with delay [in Russian]," Vestn. Irkutsk Gos. Univ., Ser. Mat., **25**, 109–125 (2018).
16. *Skvortsova M. A.*, "On estimates of solutions in a predator-prey model with two delays [in Russian]," Sib. Electron. Math. Rep., **15**, 1697–1718 (2018).
17. *Hartman Ph.*, Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons, New York; London; Sydney (1964).

Submitted September 11, 2019
Revised November 22, 2019
Accepted Novemver 27, 2019

Maria A. Skvortsova
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Avenue, Novosibirsk 630090, Russia;
Novosibirsk State University,
1 Pirogov Street, Novosibirsk 630090, Russia
sm-18-nsu@yandex.ru