Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2024. Том 31, № 2

УДК 517.957

ОБ ИНВАРИАНТАХ ЛАПЛАСА ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ТИПА

И. В. Рахмелевич

Аннотация. Исследуются двумерные нелинейные уравнения в частных производных второго порядка с переменными коэффициентами, левая часть которых представляет собой однородный полином второй степени по искомой функции и ее производным. Рассматривается множество линейных мультипликативных преобразований неизвестной функции, сохраняющих вид исходного уравнения. Аналогично линейным уравнениям инварианты Лапласа определяются как инварианты этого преобразования. Получены выражения для инвариантов Лапласа через коэффициенты уравнения и их первые производные. Для рассматриваемых уравнений найдены эквивалентные системы уравнений первого порядка, содержащие инварианты Лапласа. Показано, что если один из инвариантов Лапласа равен нулю, то соответствующая система сводится к одному уравнению первого порядка. Также в этом случае при выполнении некоторых дополнительных условий на коэффициенты может быть получено решение исходного уравнения в квадратурах. Исследования проведены для гиперболического уравнения со смешанной производной и для нелинейного уравнения второго порядка общего вида с однородным полиномом второй степени по искомой функции и ее производным. Для этих случаев получены выражения для инвариантов Лапласа и приведены соответствующие эквивалентные системы.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-46-58

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных, гиперболическое уравнение, инвариант Лапласа, линейное мультипликативное преобразование.

Введение

При исследовании свойств симметрии и классификации линейных гиперболических уравнений с переменными коэффициентами весьма эффективным является подход, основанный на использовании инвариантов Лапласа [1, 2]. Как известно, инварианты Лапласа — это функции коэффициентов уравнения и их производных, инвариантные относительно линейного мультипликативного преобразования, которое переводит исходное дифференциальное уравнение в уравнение того же вида. Первоначально эти инварианты были найдены для двумерного линейного гиперболического уравнения с переменными коэффициентами

$$u''_{xy} + a(x,y)u'_x + b(x,y)u'_y + c(x,y)u = 0. \tag{0.1}$$

Здесь и ниже приняты обозначения $u'_x \equiv \partial u/\partial x$, $u'_y \equiv \partial u/\partial y$, $u''_{xy} \equiv \partial^2 u/\partial x \partial y$ и т. д. Для данного уравнения инварианты Лапласа имеют вид [1, 2]

$$h = a'_x + ab - c, \quad k = b'_y + ab - c. \tag{0.2}$$

В дальнейшем инварианты Лапласа были найдены для различных типов линейных уравнений как второго, так и более высоких порядков [3–6]. Также в ряде работ инварианты Лапласа и их обобщения применялись к исследованию некоторых классов нелинейных уравнений в частных производных [7–9]. Целью данной работы является нахождение инвариантов Лапласа для двумерных нелинейных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, содержащих однородный полином второй степени от искомой функции и ее производных.

1. Гиперболическое уравнение со смешанной производной

Рассмотрим нелинейное гиперболическое уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $u = u(x, y)$:

$$uu''_{xy} + b_{12}(x, y)u'_x u'_y + b_{01}(x, y)uu'_x + b_{02}(x, y)uu'_y + c(x, y)u^2 = 0. \tag{1.1}$$

Левая часть уравнения (1.1) представляет собой однородный полином специального вида по неизвестной функции и ее производным.

Применим к уравнению (1.1) мультипликативное преобразование искомой функции, которое имеет вид

$$u(x, y) = \lambda(x, y)v(x, y). \tag{1.2}$$

Подставив (1.2) в уравнение (1.1), после дифференцирования и элементарных преобразований получаем уравнение относительно новой неизвестной функции $v(x, y)$:

$$vv''_{xy} + \widetilde{b}_{12}(x, y)v'_x v'_y + \widetilde{b}_{01}(x, y)vv'_x + \widetilde{b}_{02}(x, y)vv'_y + \widetilde{c}(x, y)v^2 = 0. \tag{1.3}$$

Здесь и всюду далее знаком «тильда» отмечены величины, относящиеся к преобразованному уравнению. Найдем, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты уравнений (1.1), (1.3), чтобы одно из этих уравнений можно было привести к другому с помощью преобразования (1.2).

Коэффициенты преобразованного уравнения (1.3) определяются выражениями

$$\widetilde{b}_{12} = b_{12}, \quad \widetilde{b}_{01} = b_{01} + \frac{\lambda'_y}{\lambda}(1 + b_{12}), \quad \widetilde{b}_{02} = b_{02} + \frac{\lambda'_x}{\lambda}(1 + b_{12}), \tag{1.4}$$

$$\widetilde{c} = c + \frac{\lambda'_x}{\lambda}b_{01} + \frac{\lambda'_y}{\lambda}b_{02} + \frac{\lambda'_x \lambda'_y}{\lambda^2}b_{12} + \frac{\lambda''_{xy}}{\lambda}. \tag{1.5}$$

Из формул (1.4) получаем

$$\lambda'_x = \frac{\widetilde{b}_{02} - b_{02}}{1 + b_{12}}\lambda, \quad \lambda'_y = \frac{\widetilde{b}_{01} - b_{01}}{1 + b_{12}}\lambda. \tag{1.6}$$

Дифференцируя первое из соотношений (1.6) по y, а второе по x, находим смешанные производные:

$$\lambda''_{xy} = ((\widetilde{A}_2 - A_2)'_y + (\widetilde{A}_1 - A_1)(\widetilde{A}_2 - A_2))\lambda, \tag{1.7а}$$

$$\lambda''_{yx} = ((\widetilde{A}_1 - A_1)'_x + (\widetilde{A}_1 - A_1)(\widetilde{A}_2 - A_2))\lambda. \tag{1.7б}$$

Здесь введены обозначения:

$$A_1 = \frac{b_{01}}{1+b_{12}}, \quad A_2 = \frac{b_{02}}{1+b_{12}}, \quad \widetilde{A}_1 = \frac{\widetilde{b}_{01}}{1+\widetilde{b}_{12}}, \quad \widetilde{A}_2 = \frac{\widetilde{b}_{02}}{1+\widetilde{b}_{12}}. \tag{1.8}$$

На основании теоремы о равенстве смешанных производных из (1.7а,б) следует:

$$(\widetilde{A}_1 - A_1)'_x = (\widetilde{A}_2 - A_2)'_y. \tag{1.9}$$

Далее, подставляя (1.6), (1.7б) в (1.5) и учитывая (1.8), получаем

$$\widetilde{c} - c = (\widetilde{A}_1 - A_1)'_x + (1+b_{12})(\widetilde{A}_1 - A_1)(\widetilde{A}_2 - A_2) + b_{01}(\widetilde{A}_2 - A_2) + b_{02}(\widetilde{A}_1 - A_1). \tag{1.10}$$

После некоторых элементарных преобразований (1.10) приводится к виду

$$\widetilde{c} - c = (\widetilde{A}_1 - A_1)'_x + (1+b_{12})(\widetilde{A}_1\widetilde{A}_2 - A_1A_2). \tag{1.11}$$

Преобразуем (1.11) так, чтобы в левой части были только слагаемые, относящиеся к преобразованному уравнению, а в правой части — относящиеся только к исходному уравнению, тогда с учетом (1.8) и первой формулы (1.4) находим

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\widetilde{b}_{01}}{1+\widetilde{b}_{12}}\right) + \frac{\widetilde{b}_{01}\widetilde{b}_{02}}{1+\widetilde{b}_{12}} - \widetilde{c} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_{01}}{1+b_{12}}\right) + \frac{b_{01}b_{02}}{1+b_{12}} - c. \tag{1.12}$$

Из (1.12) следует, что функция

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_{01}}{1+b_{12}}\right) + \frac{b_{01}b_{02}}{1+b_{12}} - c \tag{1.13}$$

не изменяется при преобразовании (1.2) и поэтому является инвариантом уравнения (1.1) относительно данного преобразования.

Для нахождения второго инварианта, подставляя (1.6), (1.7а) в (1.5) и учитывая (1.8), получаем

$$\widetilde{c} - c = (\widetilde{A}_2 - A_2)'_y + (1+b_{12})(\widetilde{A}_1 - A_1)(\widetilde{A}_2 - A_2) + b_{01}(\widetilde{A}_2 - A_2) + b_{02}(\widetilde{A}_1 - A_1). \tag{1.14}$$

В результате рассуждений, аналогичных приведенным выше, (1.14) преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\widetilde{b}_{02}}{1+\widetilde{b}_{12}}\right) + \frac{\widetilde{b}_{01}\widetilde{b}_{02}}{1+\widetilde{b}_{12}} - \widetilde{c} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_{02}}{1+b_{12}}\right) + \frac{b_{01}b_{02}}{1+b_{12}} - c. \tag{1.15}$$

Из (1.15) следует, что функция

$$I_2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_{02}}{1+b_{12}}\right) + \frac{b_{01}b_{02}}{1+b_{12}} - c \tag{1.16}$$

также является инвариантом уравнения (1.1) относительно преобразования (1.2).

Используя соотношения (1.6), нетрудно выразить функцию $\lambda(x,y)$, определяющую вид преобразования (1.2), через коэффициенты уравнений (1.1), (1.3):

$$\lambda(x,y) = \lambda_0 \exp\left\{\int\left(\frac{\widetilde{b}_{02} - b_{02}}{1+b_{12}}\,dx + \frac{\widetilde{b}_{01} - b_{01}}{1+b_{12}}\,dy\right)\right\}, \tag{1.17}$$

где λ_0 — произвольная постоянная.

Итак, в результате проведенных рассуждений доказана следующая

Теорема 1.1. *Уравнение* (1.1) *может быть приведено с помощью преобразования* (1.2) *к другому уравнению* (1.3) *того же вида в том и только в том случае, если инварианты* I_1, I_2, *определяемые формулами* (1.13), (1.16), *одинаковы для обоих уравнений и если выполнено условие* $\widetilde{b}_{12} = b_{12}$. *При этом коэффициент* $\lambda(x, y)$ *преобразования* (1.2) *определяется формулой* (1.17).

Следствие 1. *Если для уравнения* (1.1) $I_1 = I_2 = 0$, *то это уравнение с помощью преобразования* (1.2) *может быть приведено к виду*

$$vv''_{xy} + b_{12}(x, y)v'_x v'_y = 0. \tag{1.18}$$

Данное утверждение следует из того факта, что для уравнения (1.18) *оба инварианта равны 0, а коэффициент* b_{12} *такой же, как у исходного уравнения* (1.1).

Теорема 1.2. *Уравнение* (1.1) *эквивалентно следующим системам уравнений относительно неизвестных функций* $u(x, y), w(x, y)$:

$$\begin{cases} uu'_y + \dfrac{b_{01}}{1 + b_{12}} u^2 = w, \\ w'_x + \left(b_{02} + (b_{12} - 1)\dfrac{u'_x}{u}\right) w = I_1 u. \end{cases} \tag{1.19}$$

$$\begin{cases} uu'_x + \dfrac{b_{02}}{1 + b_{12}} u^2 = w, \\ w'_y + \left(b_{01} + (b_{12} - 1)\dfrac{u'_y}{u}\right) w = I_2 u. \end{cases} \tag{1.20}$$

Доказательство. 1. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$P[u] = \left(\frac{\partial}{\partial x} + p_2 + p_3 \frac{u'_x}{u}\right)\left(u\frac{\partial}{\partial y} + p_1 u\right) u, \tag{1.21}$$

где $p_{1,2,3}(x, y)$ — пока неопределенные коэффициенты, которые будут определены ниже. Раскрывая скобки, преобразуем оператор (1.21):

$$P[u] = uu''_{xy} + (1 + p_3)u'_x u'_y + p_1(2 + p_3)uu'_x + p_2 uu'_y + (p_1 p_2 + (p_1)'_x)u^2. \tag{1.22}$$

Определим коэффициенты p_1, p_2, p_3 так, чтобы выполнялись соотношения

$$1 + p_3 = b_{12}, \quad p_1(2 + p_3) = b_{01}, \quad p_2 = b_{02}. \tag{1.23}$$

Из (1.23) находим, что эти коэффициенты определяются выражениями

$$p_1 = \frac{b_{01}}{1 + b_{12}}, \quad p_2 = b_{02}, \quad p_3 = b_{12} - 1. \tag{1.24}$$

Используя (1.22), (1.23), (1.24) и учитывая (1.13), $P[u]$ можно представить в виде

$$P[u] = (uu''_{xy} + b_{12}(x, y)u'_x u'_y + b_{01}(x, y)uu'_x + b_{02}(x, y)uu'_y + c(x, y)u^2) + I_1 u^2. \tag{1.25}$$

Выражение в скобках в (1.25) совпадает с левой частью уравнения (1.1). Поэтому если $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то (1.25) сводится к следующему:

$$P[u] = I_1 u^2. \tag{1.26}$$

Вводя новую неизвестную функцию

$$w(x,y) = uu'_y + p_1 u^2,$$

получаем из (1.21), (1.23) и (1.26), что функции $u(x,y), w(x,y)$ удовлетворяют системе уравнений (1.19).

2. Рассмотрим нелинейный дифференциальный оператор

$$Q[u] = \left(\frac{\partial}{\partial y} + q_2 + q_3\frac{u'_y}{u}\right)\left(u\frac{\partial}{\partial x} + q_1 u\right)u. \tag{1.27}$$

Проводя рассуждения, аналогичные п. 1 доказательства, находим

$$q_1 = \frac{b_{02}}{1+b_{12}}, \quad q_2 = b_{01}, \quad q_3 = b_{12} - 1, \tag{1.28}$$

тогда $Q[u]$ можно представить в виде

$$Q[u] = (uu''_{xy} + b_{12}(x,y)u'_x u'_y + b_{01}(x,y)uu'_x + b_{02}(x,y)uu'_y + c(x,y)u^2) + I_2 u^2. \tag{1.29}$$

Аналогично п. 1 если $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению (1.1), то (1.29) сводится к следующему:

$$Q[u] = I_2 u^2. \tag{1.30}$$

Вводя новую неизвестную функцию

$$w(x,y) = uu'_x + q_1 u^2,$$

получаем из (1.27), (1.28) и (1.30), что функции $u(x,y), w(x,y)$ удовлетворяют системе уравнений (1.20) . Теорема доказана.

Используя системы (1.19), (1.20) , можно получить общее решение уравнения (1.1) в квадратурах в некоторых частных случаях, которые приведем ниже.

Случай 1. $I_1 = 0$, $b_{12} = 1$. Решая второе уравнение системы (1.19), находим

$$w(x,y) = w_0(y)\exp\left(-\int b_{02}\,dx\right), \tag{1.31}$$

где $w_0(y)$ — произвольная функция. Подставляя (1.31) в первое уравнение системы (1.19), находим общее решение уравнения (1.1):

$$u(x,y) = \left\{\left[u_0(x) + 2\int w_0(y)\exp\left(\int b_{01}\,dy - \int b_{02}\,dx\right)\,dy\right]\exp\left(-\int b_{01}\,dy\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.32}$$

где $u_0(x), w_0(y)$ — произвольные функции.

Случай 2. $I_2 = 0$, $b_{12} = 1$. Аналогично случаю 1, решая второе уравнение системы (1.20), находим

$$w(x,y) = w_0(x) \exp\left(-\int b_{01}\, dy\right), \tag{1.33}$$

где $w_0(x)$ — произвольная функция. Подставляя (1.33) в первое уравнение системы (1.20), находим общее решение уравнения (1.1):

$$u(x,y) = \left\{\left[u_0(y) + 2\int w_0(x) \exp\left(-\int b_{01}\, dy + \int b_{02}\, dx\right)\, dx\right] \exp\left(-\int b_{02}\, dx\right)\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{1.34}$$

где $u_0(y), w_0(x)$ — произвольные функции.

2. Инварианты уравнения общего вида. Анализ гиперболического уравнения

Рассмотрим теперь двумерное уравнение второго порядка общего вида, содержащее однородный полином от искомой функции и ее производных:

$$u(a_{11}u''_{xx} + a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy}) + b_{11}(u'_x)^2 + b_{12}u'_x u'_y + b_{22}(u'_y)^2 + b_{01}uu'_x + b_{02}uu'_y + cu^2 = 0. \tag{2.1}$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения (2.1) являются функциями независимых переменных: $a_{ij} = a_{ij}(x,y)$, $b_{ij} = b_{ij}(x,y)$, $c = c(x,y)$. Применим к уравнению (2.1) линейное мультипликативное преобразование (1.2), в результате чего (2.1) приводится к виду

$$v(\widetilde{a}_{11}v''_{xx} + \widetilde{a}_{12}v''_{xy} + \widetilde{a}_{22}v''_{yy}) + \widetilde{b}_{11}(v'_x)^2 + \widetilde{b}_{12}v'_x v'_y + \widetilde{b}_{22}(v'_y)^2 + \widetilde{b}_{01}vv'_x + \widetilde{b}_{02}vv'_y + \widetilde{c}v^2 = 0. \tag{2.2}$$

Коэффициенты уравнений (2.1) и (2.2) связаны соотношениями

$$\widetilde{a}_{11} = a_{11}, \quad \widetilde{a}_{12} = a_{12}, \quad \widetilde{a}_{22} = a_{22}, \quad \widetilde{b}_{11} = b_{11}, \quad \widetilde{b}_{12} = b_{12}, \quad \widetilde{b}_{22} = b_{22}, \tag{2.3}$$

$$\widetilde{b}_{01} = b_{01} + 2(a_{11} + b_{11})\frac{\lambda'_x}{\lambda} + (a_{12} + b_{12})\frac{\lambda'_y}{\lambda}, \tag{2.4а}$$

$$\widetilde{b}_{02} = b_{02} + 2(a_{22} + b_{22})\frac{\lambda'_y}{\lambda} + (a_{12} + b_{12})\frac{\lambda'_x}{\lambda}, \tag{2.4б}$$

$$\widetilde{c} = c + a_{11}\frac{\lambda''_{xx}}{\lambda} + b_{11}\left(\frac{\lambda'_x}{\lambda}\right)^2 + a_{12}\frac{\lambda''_{xy}}{\lambda} + b_{12}\frac{\lambda'_x\lambda'_y}{\lambda^2} + a_{22}\frac{\lambda''_{yy}}{\lambda} + b_{22}\left(\frac{\lambda'_y}{\lambda}\right)^2 + b_{01}\frac{\lambda'_x}{\lambda} + b_{02}\frac{\lambda'_y}{\lambda}. \tag{2.5}$$

Решая систему уравнений (2.4а,б) относительно $\frac{\lambda'_x}{\lambda}, \frac{\lambda'_y}{\lambda}$ и учитывая соотношения (2.3), находим

$$\lambda'_x = (\widetilde{B}_1 - B_1)\lambda, \quad \lambda'_y = (\widetilde{B}_2 - B_2)\lambda, \tag{2.6}$$

где

$$B_1 = \frac{2b_{01}(a_{22} + b_{22}) - b_{02}(a_{12} + b_{12})}{\Delta}, \quad B_2 = \frac{2b_{02}(a_{11} + b_{11}) - b_{01}(a_{12} + b_{12})}{\Delta}, \tag{2.7}$$

$$\Delta = 4(a_{11}+b_{11})(a_{22}+b_{22}) - (a_{12}+b_{12})^2, \tag{2.7а}$$

$$\widetilde{B}_1 = \frac{2\widetilde{b}_{01}(\widetilde{a}_{22}+\widetilde{b}_{22}) - \widetilde{b}_{02}(\widetilde{a}_{12}+\widetilde{b}_{12})}{\widetilde{\Delta}}, \quad \widetilde{B}_2 = \frac{2\widetilde{b}_{02}(\widetilde{a}_{11}+\widetilde{b}_{11}) - \widetilde{b}_{01}(\widetilde{a}_{12}+\widetilde{b}_{12})}{\widetilde{\Delta}}, \tag{2.8}$$

$$\widetilde{\Delta} = 4(\widetilde{a}_{11}+\widetilde{b}_{11})(\widetilde{a}_{22}+\widetilde{b}_{22}) - (\widetilde{a}_{12}+\widetilde{b}_{12})^2. \tag{2.8а}$$

Дифференцируя первое из соотношений (2.6) по y, а второе по x, получаем

$$\lambda''_{xy} = ((\widetilde{B}_1 - B_1)'_y + (\widetilde{B}_1 - B_1)(\widetilde{B}_2 - B_2))\lambda, \tag{2.9а}$$

$$\lambda''_{yx} = ((\widetilde{B}_2 - B_2)'_x + (\widetilde{B}_1 - B_1)(\widetilde{B}_2 - B_2))\lambda. \tag{2.9б}$$

На основании теоремы о равенстве смешанных производных из (2.9а,б) находим

$$(\widetilde{B}_1 - B_1)'_y = (\widetilde{B}_2 - B_2)'_x, \tag{2.10}$$

или

$$\widetilde{B}'_{1y} - \widetilde{B}'_{2x} = B'_{1y} - B'_{2x}. \tag{2.10а}$$

В свою очередь, из (2.10а) следует, что при преобразовании (1.2) для уравнения (2.1) величина

$$I_1 = B'_{1y} - B'_{2x} \tag{2.11}$$

является инвариантом.

Подставим в (2.5) выражения (2.6) для $\frac{\lambda'_x}{\lambda}, \frac{\lambda'_y}{\lambda}$ с учетом (2.7), (2.7а), (2.8), (2.8а). После дифференцирования и некоторых преобразований получаем выражение для второго инварианта:

$$I_2 = a_{11}B'_{1x} + a_{12}B'_{1y} + a_{22}B'_{2y} + \frac{(a_{22}+b_{22})b_{01}^2 + (a_{11}+b_{11})b_{02}^2 - (a_{12}+b_{12})b_{01}b_{02}}{\Delta}. \tag{2.12}$$

Из проведенных выше рассуждений следует

Теорема 2.1. *Уравнение* (2.1) *может быть приведено с помощью преобразования* (1.2) *к другому уравнению* (2.2) *того же вида в том и только в том случае, если инварианты* I_1, I_2, *определяемые формулами* (2.11), (2.12), *одинаковы для обоих уравнений и если выполнены условия* (2.3) *для коэффициентов обоих уравнений.*

Замечание. Для сравнения с результатами разд. 1 вместо I_1, I_2 будем использовать инварианты $J_1 = I_2 - a_{12}I_1, J_2 = I_2$, так что для J_2 справедливо выражение (2.12), а J_1 определяется выражением

$$J_1 = a_{11}B'_{1x} + a_{12}B'_{2x} + a_{22}B'_{2y} + \frac{(a_{22}+b_{22})b_{01}^2 + (a_{11}+b_{11})b_{02}^2 - (a_{12}+b_{12})b_{01}b_{02}}{\Delta}. \tag{2.13}$$

Нетрудно проверить, что в частном случае $a_{11} = b_{11} = a_{22} = b_{22} = 0$, $a_{12} = 1$ инварианты (2.13), (2.12) сводятся к инвариантам (1.13), (1.16) соответственно, полученным в разд. 1 для гиперболического уравнения со смешанной производной.

Теорема 2.2. *Пусть коэффициенты уравнения* (2.1)

$$a_{11} = 1, \quad a_{22} = -1, \quad a_{12} = 0, \tag{2.14}$$

что соответствует гиперболическому уравнению канонического вида.

1. *Если выполнено дополнительное условие*

$$b_{12} = -b_{11} - b_{22}, \tag{2.15}$$

то уравнение (2.1) *эквивалентно следующей системе уравнений:*

$$\begin{cases} u(u'_x - u'_y) + \dfrac{b_{01} + b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}} u^2 = w, \\ w'_x + w'_y + \left(\dfrac{b_{01}(1 - b_{22}) - b_{02}(1 + b_{11})}{2 + b_{11} - b_{22}} + (b_{11} - 1)\dfrac{u'_x}{u} - (b_{22} + 1)\dfrac{u'_y}{u} \right) w = H_1 u. \end{cases} \tag{2.16}$$

2. *Если выполнено дополнительное условие*

$$b_{12} = b_{11} + b_{22}, \tag{2.17}$$

то уравнение (2.1) *эквивалентно следующей системе уравнений:*

$$\begin{cases} u(u'_x + u'_y) + \dfrac{b_{01} - b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}} u^2 = w, \\ w'_x - w'_y + \left(\dfrac{b_{01}(1 - b_{22}) + b_{02}(1 + b_{11})}{2 + b_{11} - b_{22}} + (b_{11} - 1)\dfrac{u'_x}{u} + (b_{22} + 1)\dfrac{u'_y}{u} \right) w = H_2 u. \end{cases} \tag{2.18}$$

Здесь H_1, H_2 — *инварианты уравнения* (2.1), *которые для рассматриваемого случая определяются выражениями*

$$H_1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{b_{01} + b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}} + \frac{b_{01}^2(1 - b_{22}) - b_{02}^2(1 + b_{11}) + b_{01}b_{02}b_{12}}{(2 + b_{11} - b_{22})^2} - c, \tag{2.19}$$

$$H_2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{b_{01} - b_{02}}{2 + b_{11} - b_{22}} + \frac{b_{01}^2(1 - b_{22}) - b_{02}^2(1 + b_{11}) + b_{01}b_{02}b_{12}}{(2 + b_{11} - b_{22})^2} - c. \tag{2.20}$$

Доказательство. Пусть нелинейный дифференциальный оператор $P[u]$ определяется выражением

$$P[u] = \left(p_1 \frac{\partial}{\partial x} + p_2 \frac{\partial}{\partial y} + p_3 + p_4 \frac{u'_x}{u} + p_5 \frac{u'_y}{u} \right) \left(q_1 u \frac{\partial}{\partial x} + q_2 u \frac{\partial}{\partial y} + q_3 u \right) u, \tag{2.21}$$

где $p_{1,2,3,4,5}(x, y)$, $q_{1,2,3}(x, y)$ — пока неопределенные коэффициенты, которые будут определены ниже. В результате элементарных преобразований выражение (2.21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} P[u] &= p_1 q_1 u u''_{xx} + (p_1 q_2 + p_2 q_1) u u''_{xy} + p_2 q_2 u u''_{yy} + (p_1 + p_4) q_1 (u'_x)^2 + (p_2 + p_5) q_2 (u'_y)^2 \\ &+ (p_1 q_2 + p_2 q_1 + p_4 q_2 + p_5 q_1) u'_x u'_y + (p_1 q'_{1x} + p_2 q'_{1y} + 2 p_1 q_3 + p_3 q_1 + p_4 q_3) u u'_x \\ &+ (p_1 q'_{2x} + p_2 q'_{2y} + 2 p_2 q_3 + p_3 q_2 + p_5 q_3) u u'_y + (p_1 q'_{3x} + p_2 q'_{3y} + p_3 q_3) u^2, \end{aligned} \tag{2.22}$$

Определим p_i, q_i так, чтобы коэффициенты во всех слагаемых в (2.22), кроме последнего, совпадали с соответствующими коэффициентами уравнения (2.1). Учитывая условия (2.14), получаем систему уравнений относительно p_i, q_i:

$$p_1q_1 = 1, \quad p_1q_2 + p_2q_1 = 0, \quad p_2q_2 = -1, \tag{2.23а}$$

$$(p_1+p_4)q_1 = b_{11}, \quad (p_1+p_4)q_2 + (p_2+p_5)q_1 = b_{12}, \quad (p_2+p_5)q_2 = b_{22}, \tag{2.23б}$$

$$p_1q'_{1x} + p_2q'_{1y} + 2p_1q_3 + p_3q_1 + p_4q_3 = b_{01}, \tag{2.23в}$$

$$p_1q'_{2x} + p_2q'_{2y} + 2p_2q_3 + p_3q_2 + p_5q_3 = b_{02}. \tag{2.23г}$$

Из уравнений (2.23а) нетрудно получить, что

$$p_2/p_1 = \pm 1. \tag{2.24}$$

Далее, из уравнений (2.23а,б) следует:

$$p_4/p_1 = b_{11} - 1, \quad p_5/p_2 = -b_{22} - 1. \tag{2.25}$$

Подставим (2.25) во второе из уравнений (2.23б). Учитывая (2.24), получаем

$$\frac{p_2}{p_1}(b_{11} + b_{22}) = -b_{12}. \tag{2.26}$$

На основании (2.24) рассмотрим два возможных случая.

Случай 1. $p_2/p_1 = 1$. Без ограничения общности положим $p_1 = 1$, тогда с учетом (2.23а), (2.25) имеем

$$p_2 = q_1 = 1, \quad q_2 = -1, \quad p_4 = b_{11} - 1, \quad p_5 = -b_{22} - 1. \tag{2.27}$$

Кроме того, из (2.26) в этом случае следует условие (2.15). Подставляя (2.27) в (2.23в,г), получаем систему линейных уравнений относительно p_3, q_3:

$$\begin{cases} p_3 + (1+b_{11})q_3 = b_{01}, \\ -p_3 + (1-b_{22})q_3 = b_{02}. \end{cases} \tag{2.28}$$

Из (2.28) находим

$$p_3 = \frac{b_{01}(1-b_{22}) - b_{02}(1+b_{11})}{D}, \quad q_3 = \frac{b_{01}+b_{02}}{D}, \quad D = 2 + b_{11} - b_{22}. \tag{2.29}$$

Учитывая (2.27) и (2.29), выражение (2.22) преобразуем к виду

$$P[u] = (uu''_{xx} - uu''_{yy} + b_{11}(u'_x)^2 + b_{22}(u'_y)^2 + b_{12}u'_xu'_y + b_{01}uu'_x + b_{02}uu'_y + cu^2) + H_1u^2, \tag{2.30}$$

где H_1 определяется выражением (2.19). Нетрудно проверить, что при выполнении условий (2.14)

$$H_1 = I_1 + I_2,$$

где I_1, I_2 определяются выражениями (2.11), (2.12); поэтому H_1 также является инвариантом Лапласа.

Если в условиях данной теоремы функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.1), то выражение в скобках в правой части (2.30) тождественно равно 0 и (2.30) сводится к следующему:

$$P[u] = H_1 u^2. \tag{2.31}$$

Вводя новую неизвестную функцию

$$w(x, y) = q_1 u u'_x + q_2 u u'_y + q_3 u^2, \tag{2.32}$$

получаем из (2.21), (2.27), (2.29), (2.31), что функции $u(x, y), w(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений (2.16).

Случай 2. $p_2/p_1 = -1$. Без ограничения общности положим $p_1 = 1$, тогда с учетом (2.23а), (2.25) имеем

$$p_2 = -1, \quad q_1 = 1, \quad q_2 = -1, \quad p_4 = b_{11} - 1, \quad p_5 = b_{22} + 1. \tag{2.33}$$

Аналогично случаю 1 из (2.26) следует условие (2.17). Подставляя (2.33) в (2.23в,г), получаем систему линейных уравнений относительно p_3, q_3:

$$\begin{cases} p_3 + (b_{11} + 1) q_3 = b_{01}, \\ p_3 + (b_{22} - 1) q_3 = b_{02}. \end{cases} \tag{2.34}$$

Из (2.34) находим

$$p_3 = \frac{b_{01}(1 - b_{22}) + b_{02}(1 + b_{11})}{D}, \quad q_3 = \frac{b_{01} - b_{02}}{D}, \quad D = 2 + b_{11} - b_{22}. \tag{2.35}$$

Проводя рассуждения, аналогичные случаю 1, получаем, что если в условиях данной теоремы функция $u = u(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.1), то

$$P[u] = H_2 u^2, \tag{2.36}$$

где H_2 определяется выражением (2.20). Нетрудно проверить, что при выполнении условий (2.14)

$$H_2 = I_1 - I_2, \tag{2.37}$$

где I_1, I_2 определяются выражениями (2.11), (2.12); поэтому H_2 также является инвариантом Лапласа.

Вводя новую неизвестную функцию с помощью выражения (2.32), получаем из (2.21), (2.33), (2.35), (2.36), что функции $u(x, y), w(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений (2.18). Теорема доказана.

Заключение

В данной работе найдены инварианты Лапласа для двумерных уравнений в частных производных, левая часть которых имеет вид однородного полинома второй степени по искомой функции и ее производным и получены эквивалентные исходному уравнению системы уравнений первого порядка, содержащие инварианты Лапласа. Инварианты Лапласа определяются как инварианты линейного мультипликативного преобразования, преобразующего исходное уравнение к уравнению того же вида. Исследования проведены для гиперболического уравнения второго порядка со смешанной производной и для уравнения второго порядка общего вида. Приведены некоторые решения, полученные в квадратурах, для случая, когда один из инвариантов Лапласа равен 0. Данный подход может быть обобщен для нелинейных многомерных уравнений более сложного вида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гурса Э.* Курс математического анализа. Т. 3. Ч. 1. М.-Л.: ГИТТЛ, 1933.

2. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1957.

3. *Джохадзе О. М.* Об инвариантах Лапласа для некоторых классов линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Дифференц. уравнения. 2004. Т. 40, № 1. С. 58–68.

4. *Миронов А. Н., Миронова Л. Б.* Об инвариантах Лапласа для уравнения с доминирующей частной производной третьего порядка с двумя независимыми переменными // Мат. заметки. 2016. Т. 99, № 1. С. 89–96. DOI: 10.4213/mzm10613.

5. *Миронов А. Н., Миронова Л. Б.* Об инвариантах Лапласа для одного уравнения четвертого порядка с двумя независимыми переменными // Изв. вузов. Математика. 2014. № 10. С. 27–34.

6. *Миронов А. Н., Миронова Л. Б.* К инвариантам Лапласа для одного уравнения с доминирующей частной производной с тремя независимыми переменными // Дифференц. уравнения. 2019. Т. 55, № 1. С. 67–73. DOI: 10.1134/S0374064119010072.

7. *Кузнецова М. Н.* Преобразование Лапласа и нелинейные гиперболические уравнения // Уфим. мат. журн. 2009. Т. 1, № 3. С. 87–96.

8. *Жибер А. В., Соколов В. В.* Точно интегрируемые гиперболические уравнения лиувиллевского типа // Успехи мат. наук. 2001. Т. 56, № 1. С. 63–106. DOI: https://doi.org/10.4213/rm357.

9. *Старцев С. Я.* Об инвариантах Лапласа гиперболических уравнений, линеаризуемых дифференциальной подстановкой // Теор. мат. физика. 1999. Т. 120, № 2. С. 237–247.

Поступила в редакцию 15 сентября 2023 г.
После доработки 17 мая 2024 г.
Принята к публикации 30 мая 2024 г.

Рахмелевич Игорь Владимирович
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
пр. Гагарина, 23, Нижний Новгород 603950
igor-kitpd@yandex.ru

Математические заметки СВФУ
Апрель—июнь, 2024. Том 31, № 2

UDC 517.957

ON LAPLACE INVARIANTS OF TWO–DIMENSIONAL NON–LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF POLYNOMIAL TYPE

I. V. Rakhmelevich

Abstract: We study two-dimensional nonlinear partial differential equations of the second order with variable coefficients. The left-hand side of these equations is a homogeneous polynomial of the second degree on unknown function and its derivatives. We consider a set of linear multiplicative transformations of the unknown function which keep a form of initial equation. By analogy with linear equations, the Laplace invariants are determined as the invariants of this transformation. Expressions for the Laplace invariants are obtained through the coefficients of the equation and their first derivatives. For the equations under consideration, equivalent systems of first-order equations are found, containing the Laplace invariants. It is shown that if one of the Laplace invariants is equal to zero, then the corresponding system is reduced to a single first-order equation. Also in this case, if certain additional conditions on the coefficients are met, a solution to the original equation in quadratures can be obtained. The studies were carried out for a hyperbolic equation with a mixed derivative and for a nonlinear second-order equation of general form with a homogeneous polynomial of the second degree in the unknown function and its derivatives. In these cases, expressions for the Laplace invariants are obtained and the corresponding equivalent systems are given.

DOI: 10.25587/2411-9326-2024-2-46-58

Keywords: partial differential equation, hyperbolic equation, Laplace invariant, linear multiplicative transformation.

REFERENCES

1. *Goursat E.*, Cours d'Analyse Mathematique, Paris (1933).
2. *Tricomi F.*, Lectures on Partial Differential Equations [in Russian], Izdat. Inostr. Lit., Moscow (1957).
3. *Dzhokhadze O. M.*, "Laplace invariants for some classes of linear partial differential equations," Differ. Equ., **40**, No. 1, 63–74 (2004). DOI: 10.1023/B:DIEQ.0000028714.62481.2d.
4. *Mironov A. N. and Mironova L. B.*, "On Laplace invariants for equations with dominating third-order partial derivative and two independent variables," Math. Notes, **99**, No. 1-2, 110–115 (2016). DOI: 10.1134/S0001434616010119.
5. *Mironov A. N. and Mironova L. B.*, "Laplace invariants for a fourth-order equation with two independent variables," Russ. Math., **58**, No. 10, 22–28 (2014). DOI: 10.3103/S1066369X14100041.
6. *Mironov A. N. and Mironova L. B.*, "Laplace invariants of an equation with a dominating partial derivative and three independent variables," Differ. Equ., **55**, No. 1, 68–74 (2019). DOI: 10.1134/S0012266119010075.
7. *Kuznetsova M. N.*, "Laplace transform and nonlinear hyperbolic equations [in Russian]," Ufim. Mat. Zhurn., **1**, No. 3, 87–96 (2009).

8. *Zhiber A. V. and Sokolov V. V.*, “Exactly integrable hyperbolic equations of Liouville type,” Russ. Math. Surv., **56**, No. 1, 61–101 (2001). DOI: 10.1070/RM2001v056n01ABEH000357.

9. *Startsev S. Ya.*, “Laplace invariants of hyperbolic equations linearizable by a differential substitution,” Theor. Math. Phys., **120**, No. 2, 1009–1018 (1999). DOI: 10.1007/BF02557408.

Submitted September 15, 2023
Revised May 17, 2024
Accepted May 30, 2024

Igor V. Rakhmelevich
Nizhny Novgorod State University,
23 Gagarin Avenue, Nizhny Novgorod 603950, Russia
`igor-kitpd@yandex.ru`